

Решение двумерной и трехмерной стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов

Трехмерное стационарное уравнение теплопроводности можно записать в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

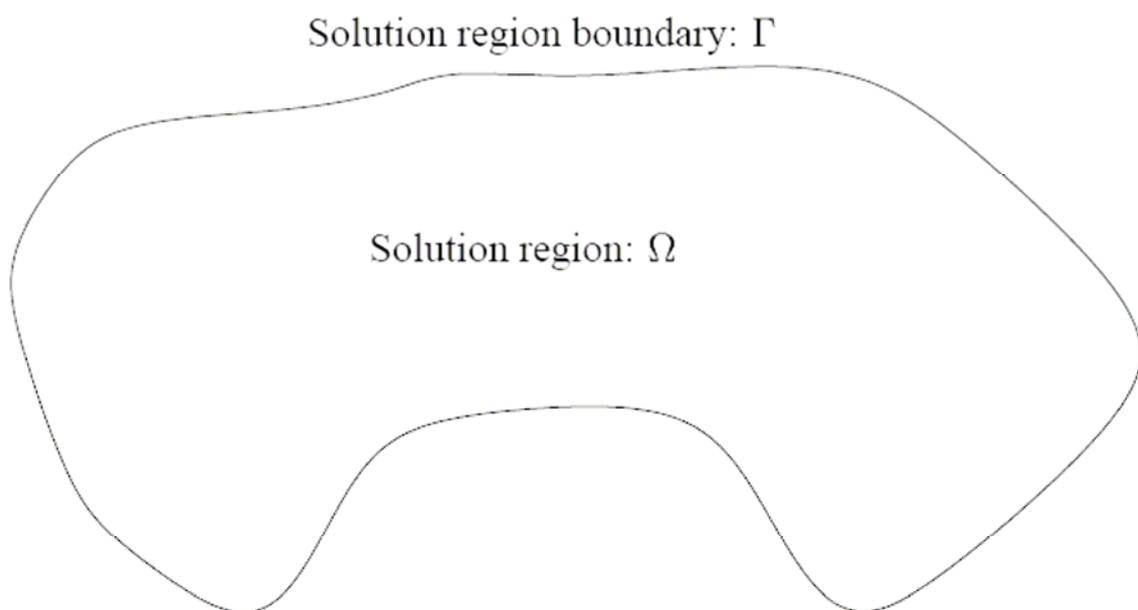
Здесь k_x, k_y, k_z – коэффициенты теплопроводности вдоль осей x, y, z . В случае постоянных коэффициентов теплопроводности уравнение записывается в виде

$$-\nabla \cdot (k \nabla u) = 0$$

если же коэффициенты теплопроводности одинаковы по всем направлениям, то уравнение принимает вид:

$$k \nabla^2 u = 0.$$

Мы должны решить уравнение в области Ω с границей Γ



Интегральное уравнение соответствующее этому уравнению можно записать следующим образом

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (k \nabla u) \omega d\Omega = 0$$

При помощи формулы Грина-Гаусса (аналог формулы интегрирования по частям):

$$\int_{\Omega} (f \nabla \cdot \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g) d\Omega = \int_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma$$

Уравнение можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (k \nabla u) \omega d\Omega = \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma$$

В отсутствие правой части (нет источников тепла) уравнение имеет вид

$$\int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma \quad \Bigg|$$

Выражение под знаком интеграла в левой части можно представить в виде

$$\nabla u \cdot \nabla \omega = \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$$

u и ω представляются в виде

$$u = \varphi_n u_n$$

$$\omega = \varphi_m$$

Здесь предполагается суммирование по одинаковым индексам.

Производные переменных «математического» пространства ($0 < \xi < 1$) по «физическим» переменным x и y определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}$$

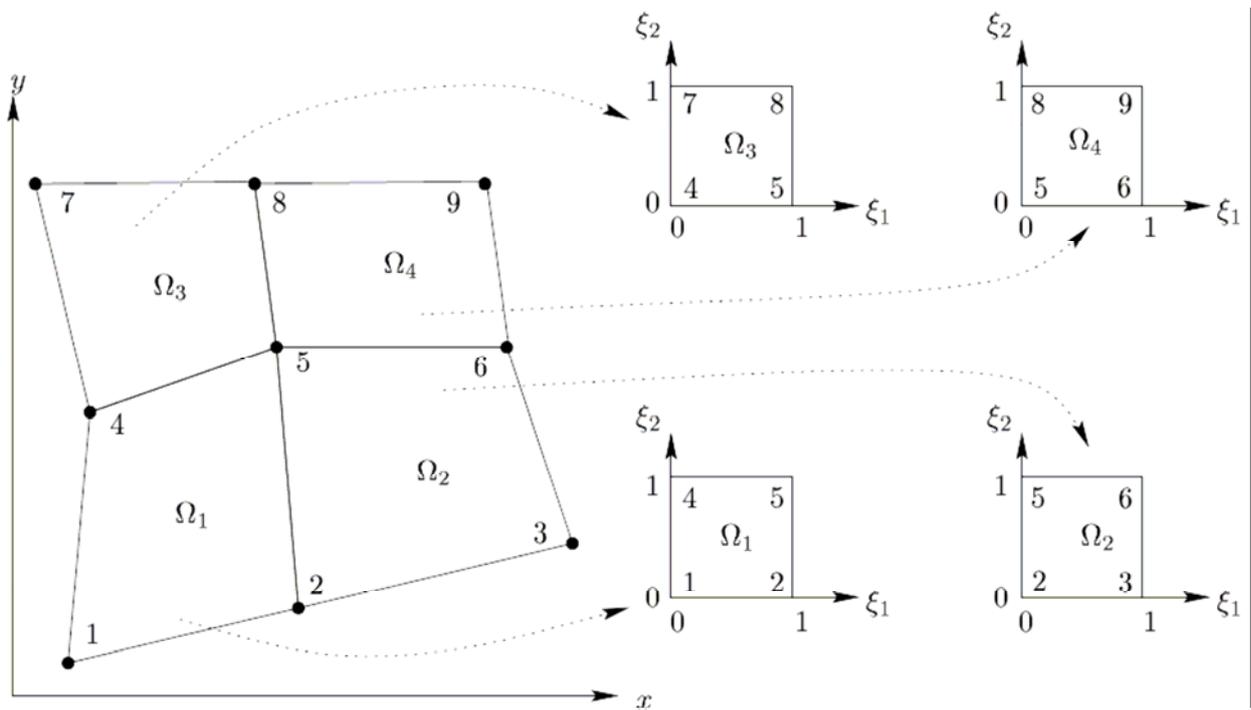
Представим область, в которой мы ищем решение, в виде совокупности элементов

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^I \Omega_i$$

В каждом элементе u можно представить в виде

$$u = \varphi_n u_n = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \dots + \varphi_N u_N$$

отобразим каждый элемент на плоскость (ξ_1, ξ_2) , как представлено на рисунке



Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$$\varphi_1 = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} &= -(1 - \xi_2) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} &= -(1 - \xi_1) \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \xi_1(1 - \xi_2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} &= 1 - \xi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} &= -\xi_1 \end{aligned}$$

$$\varphi_3 = (1 - \xi_1)\xi_2 \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} &= -\xi_2 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} &= 1 - \xi_1 \end{aligned}$$

$$\varphi_4 = \xi_1 \xi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} = \xi_2$$

$$\qquad \qquad \qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} = \xi_1$$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим

$$\sum_i u_n \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_m d\Gamma$$

или

$$E_{mn} u_n = F_m$$

E_{mn} – матрица жесткости, а F_m – вектор нагрузки, $m = 1, \dots, 4$ и $n = 1, \dots, 4$.

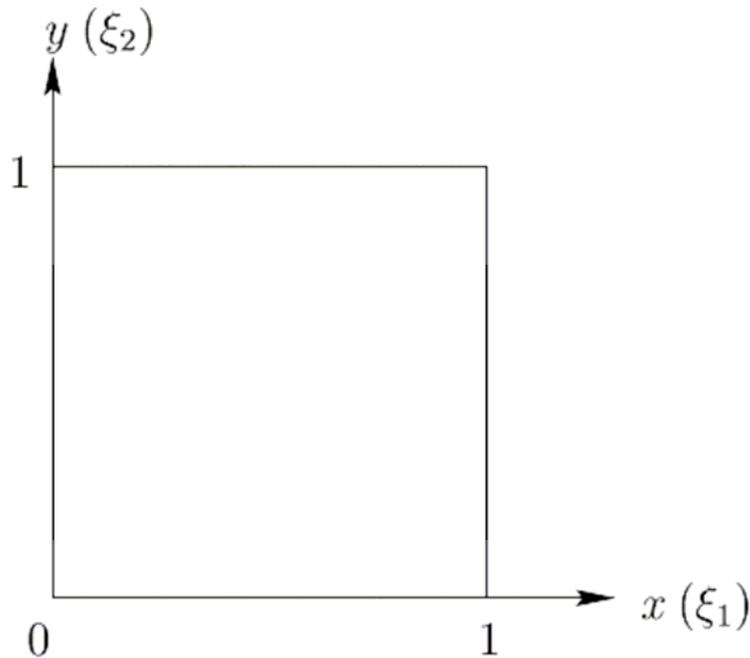
Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате (см. рисунок).

В этом случае элемент E_{11} имеет вид:

$$E_{11} = k \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2 dx dy$$

$$= \frac{2}{3} k$$

Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы жесткости.



Заметим, что если элемент не является единичным квадратом, нам надо переходить от координат (x, y) к координатам (ξ_1, ξ_2) , в этом случае надо в интеграл добавить якобиан перехода, т.е. использовать соотношение:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x}.$$

Для единичного квадрата матричное уравнение имеет вид:

$$k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = RHS \quad (\text{Right Hand Side})$$

Матрица жесткости симметрична.

Обычно область, для которой ищется решение, состоит не из одного квадратного элемента, поэтому на следующем шаге надо получить матрицу жесткости для всей области.

В качестве примера рассмотрим область, состоящую из четырех единичных квадратных элементов и девяти узлов. Получим

