Билет №20

№1

Метод граничных элементов

Дельта-функция Дирака

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта -функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Каждое такое распределение удовлетворяет условию

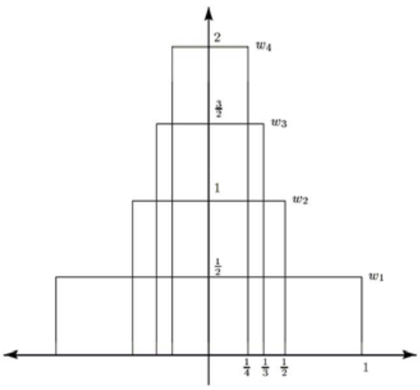
$$\int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)\ dx = 1$$

Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1.

При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Не строго дельта - функцию можно определить следующим образом:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

(см. рисунок ниже)



Свойства дельта – функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, h(x)\ dx = h(0)$$

Это можно показать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x) h(x)\, dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(x)\, dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} h(\xi) \frac{2}{n}$$
$$= h(0)$$

Кроме приведенных выше, дельта – функция еще обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x) h(x)\, dx = h(\xi)$$

$$\delta(\xi - x) = H'(\xi - t)$$

Дельта – функция – производная функции Хэвисайда

$$H(\xi - t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi < t \\ 1 & \text{if } \xi > t \end{cases}$$

Двумерная дельта – функция вводится следующим образом

$$\delta(\xi - x, \eta - y) = \delta(\xi - x)\, \delta(\eta - y)$$

Фундаментальное решение

Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области

$$\Omega \in \Re^2.$$

Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0$$

Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ, η).

Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ, η), поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Оператор Лапласа запишется в виде

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$$

Для r > 0 δ(ξ - x,η - y)=0; учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 0$$

Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид:

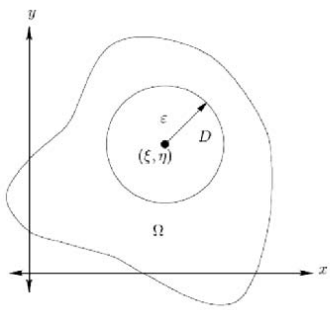
$$\omega = A\log r + B$$

Эта функция сингулярна в точке r = 0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта – функции.

$$\int_D \nabla^2\omega\, dD = -\int_D \delta\, dD = -1$$

Здесь D – любая область, содержащая точку r = 0.

Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r = 0 и радиусом ε > 0 (см. рисунок).



При помощи теоремы Грина – Гаусса оценим интеграл

$$\begin{aligned}\int_D \nabla^2\omega\, dD &= \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial n}\, dS \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial r}\, dS \\ &= \frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon \\ &= 2\pi A\end{aligned}$$

Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т. к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем:

$$A = -\frac{1}{2\pi}.$$

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r + B$$

B принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r \quad \left(= \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)$$

причем

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{4\pi r}$$

Метод граничных элементов для двумерной задачи

Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина – Гаусса:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla^2 u.\omega \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u.\nabla\omega \, d\Omega$$

Затем применим теорему Грина – Гаусса еще раз ко второму интегралу в правой части

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u.\nabla\omega \, d\Omega$$
$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega$$

В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения, (решение искалось в виде разложения по базисным функциям). В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше.

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Используя свойства дельта – функции, получим:

$$\int_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega = -\int_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right) \, d\Omega = -u\left(\xi, \eta\right) \quad (\xi, \eta) \in \Omega$$

Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид:

$$\int_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega = -\int_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right) \, d\Omega = 0$$

Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде:

$$u\left(\xi, \eta\right) + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma \quad (\xi, \eta) \in \Omega$$

Это уравнение содержит только интегралы по границе.

Если точка (ξ, η) находится вне Ω, то

$$\int_{\Omega} u\nabla^2\omega\, d\Omega = -\int_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right)\, d\Omega = 0$$

Если точка (ξ, η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением:

$$\frac{1}{2}u\left(\xi, \eta\right)$$

№2

Объектно-ориентированное моделирование

При компьютерном моделировании сложных систем с успехом используются объектно-ориентированные языки.

Владение объектно-ориентированным языком программирования (например, Java) и доступ к обширной библиотеке ресурсов составляют необходимое, но не достаточное условие для создания объектной системы. Очень важную роль в процессе ее разработки играют анализ и проектирование системы с точки зрения объектной методологии.

Аббревиатура UML означает Unified Modeling Language (унифицированный язык моделирования). Этот язык представляет собой систему обозначений, которая базируется на диаграммах и предназначается для моделирования систем на основе объектно-ориентированного подхода.

- Как распределить обязанности между классами и объектами? Как должны взаимодействовать объекты? Какие функции выполняют конкретные классы? Эти вопросы являются определяющими при разработке системы. Некоторые проверенные временем решения проблем, возникающих в процессе разработки, могут быть (и были) сформулированы в виде набора принципов, эвристик или шаблонов (patterns) — именованных формул решения проблем, позволяющих систематизировать процесс разработки конкретных систем.

Унифицированный язык моделирования UML

UML — это "язык для определения, визуализации и конструирования артефактов программных систем" Это система обозначений (включая семантику), предназначенная для моделирования систем на основе объектно-ориентированного подхода.

UML— это важный производственный стандарт для объектно-ориентированного моделирования. Он появился в 1994 году в результате совместных усилий Гради Буча (Grady Booch) и Джима Румбаха (Jim Rumbaugh) по объединению их популярных методов — метода Буча и OMT (Object Modeling Technique). Впоследствии эти две методология были объединены Айваром Якобсоном (Ivar Jacobson), создателем метода OOSE (Object-oriented Software Engineering). В ответ на запрос группы промышленных стандартов OMG (Object Management Group) об определении стандартного языка моделирования и общепринятой системы обозначений в качестве кандидата в 1997 году был представлен язык UML.

Группа OMG сертифицировала UML, который к тому времени де-факто получил одобрение специалистов многих крупных компаний, Многие организации, специализирующиеся на разработке программного обеспечения, и производители CASE-средств также приняли UML. Поэтому с высокой вероятностью можно утверждать, что этот язык станет мировым стандартом для разработчиков, авторов и производителей CASE-средств.

Полное описание системы обозначений UML можно найти на Web-узле группы OMG по адресу www.omg.org.

Для представления артефактов объектно-ориентированного анализа и проектирования существует порядка десяти различных систем-обозначений. Эта ситуация затрудняет эффективное сотрудничество между группами разработчиков, обучение и использование CASE-средств. Авторы UML— Буч, Якобсон и Румбах — создали стандартизированный, элегантный, выразительный и гибкий язык моделирования и тем самым внесли значительный вклад в развитие объектной технологии проектирования.

UML— это язык моделирования, а не руководство разработчика по объектно-ориентированному анализу и проектированию.

Естественно, методы, модели и средства создания эффективных, программных систем будут развиваться и в дальнейшем. Однако лишь сейчас специалисты получили возможность пользоваться единым языком — UML.

Анализ и проектирование

Для создания программного приложения необходимо описать проблему и требования к системе. Этап анализа (analysis) состоит в исследовании проблемы, а не в поисках путей ее решения. Например, при разработке новой информационной системы для компьютерной **библиотеки** необходимо описать экономические процессы, связанные с ее использованием,

При разработке приложения необходимо также обеспечить высокий уровень и подробное описание логики решения, удовлетворяющего требованиям к системе и налагаемым ограничениям. В процессе проектирования(design) основное внимание уделяется логическому решению, обеспечивающему выполнение основных требований. Например, как на самом деле будет функционировать информационная библиотечная система? Безусловно, проект может быть реализован в виде аппаратных средств и программного обеспечения.

Объектно-ориентированный анализ и проектирование

Основная идея объектно-ориентированного анализа и проектирования (object-oriented analysis and design) состоит в рассмотрении предметной области и логического решения задачи с точки зрения объектов (понятий или сущностей).

В процессе объектно-ориентированного анализа основное внимание уделяется определению и описанию объектов (или понятий) в терминах предметной области. Например, в случае библиотечной информационной системы среди понятий должны присутствовать Book(книга), Library (библиотека) и Patron(клиент).

В процессе объектно-ориентированного проектирования определяются логические программные объекты, которые будут реализованы средствами объектно-ориентированного языка программирования. Эти программные объекты включают в себя атрибуты и методы. Например, в библиотечной **системе** программный объект Book может содержать атрибут title (название) и **метод** print (печатать)

И наконец, в процессе конструирования (construction) или объектно-ориентированно программирования (object-oriented programming) обеспечивается реализация разработанных компонентов, таких как класс Book на языке C++, Java. Smalltalk или Visual Basic.