Билет 1.

1. Понятие модели. Типы моделей. Три уровня детализации модели. Детерминированные и статистические модели.

Понятие модели. **Модель** - способ замещения реального объекта, используемый для его исследования, когда натуральный эксперимент невозможен, дорог, опасен, долговременен. (*небезопасно* для человека, *дорого*, в увеличенном *масштабе времени*, в уменьшенном / увеличенном *масштабе пространства,* попросту *не существует)* **Модель** несет системообразующую и смыслообразующую роль в научном познании. На модели изучают неизвестные свойства предметов. Модель стремится, как можно более ярко выразить структуру явления, его главные аспекты. Модель является концентрированным выражением сущности предмета или процесса, выделяя только его основные черты. Знания - это модели окружающего мира, фиксируемые человеком в его мозге или на технических носителях. Модели обладают повышенной наглядностью, выделяя главные аспекты сущности, и активно используются в процессах познания и обучения. Человек, решая как ему поступить в той или иной ситуации, всегда пытается представить себе последствия решения, для этого он проигрывает ситуацию, представляет ее себе мысленно, строя модель в голове. То есть, во-первых, модели это основа разумной мыслительной деятельности, во-вторых, модели играют роль инструмента для прогнозирования. Таким образом, можно сформулировать определение модели [1]: ***Моделью называется специально синтезированный для удобства исследования объект, который обладает необходимой степенью подобия исходному, адекватной целям исследования.***

Классификация моделей. В качестве первого классификационного признака можно ввести *деление по функциональным качествам системы,* которые должны быть отражены в модели. Другим общим признаком классификации является *степень детализации модели* или глубина изучения системы. Если мы классифицируем модели по степени детализации, то первым, наиболее общим видом моделей являются *вербальные* модели, представляющие словесные описания системы. Последующие классы моделей связывают с дальнейшей формализацией представлений о системе. Следующим классом моделей, относительно наполненным математическим содержанием, являются *концептуальные модели.* Они описывают в общем виде преобразование информации в системе и процесс ее циркуляции по каналам связи. Концептуальные модели представляют собой первый шаг в деле количественного познания системы как множества с заданными на нем отношениями. Наконец, последний класс моделей составляют *динамические (математические) модели.* Они содержат конкретное описание законов преобразования информации в системе в виде логических, дифференциальных, интегральных разностных отношений или конечных алгоритмов. Тем самым структура системы, выявленная на этапе создания концептуальной модели, наполняется конкретным математическим (логическим) содержанием. Компьютерное моделирование имеет дело, как правило, с последним из перечисленных типов моделей. В свою очередь динамические (математические) модели можно также разделить на несколько групп. К первой группе можно отнести так называемые детерминированные модели. Это модели объектов и процессов, которые однозначно описываются при помощи математических формул, уравнений или систем уравнений. При этом задача компьютерного моделирования сводится к решению на компьютере математических задач. Вторая группа – это статистические модели. Они применяются при решении задач, связанных с обработкой большого количества данных и различного типа вероятностных задач. Для решения этих задач применяются различные специальные методы. Третья группа – объектноориентированные модели. Эти модели применяются для компьютерного моделирования задач из самых различных областей: экономика, компьютерные игры, компьютерная графика и многих других. В данном случае речь не идет о решении каких-либо математических задач, а о создании разнообразных компьютерных приложений, основанных на объектно-ориентированной парадигме программирования.

2. Процедура ансамблирования в методе конечных элементов.

Ансамблирование. Ансамблирование или сборка представляет собой объединение отдельных элементов в конечно-элементную сетку. С математической точки зрения ансамблирование состоит в объединении матриц жесткости отдельных элементов в одну глобальную матрицу жесткости всей конструкции. При этом существенно используются две системы нумерации узлов элементов: локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого типа конечных элементов в соответствии с введенной локальной системой координат на элементе. Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть совершенно произвольной, также как и глобальная нумерация конечных элементов. Однако, между локальными номерами и глобальными номерами узлов существует взаимнооднозначное соответствие, на основе которого и формируется глобальная система конечно-элементных уравнений.

$k\nabla^2 u=0$ Интегральное уравнение, соответствующее этому уравнению, можно записать следующим образом: $\int_\Omega -\nabla(k\nabla u)\omega\, d\Omega=0$ При помощи формулы Грина-Гаусса: $\int_\Omega (f\nabla*\nabla g+\nabla f*\nabla g)\,d\Omega=\int_\Gamma f\frac{\partial g}{\partial n}d\Gamma$ Уравнение можно переписать в виде $\int_\Omega -\nabla(k\nabla u)\omega\, d\Omega=\int_\Omega k\nabla u*\nabla\omega\, d\Omega-\int_\Gamma k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$. В отсутствии правой части уравнение имеет вид: $\int_\Omega k\nabla u*\nabla\omega\, d\Omega=\int_\Gamma k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$. Выражение под знаком интерграла в левой части можно представить в виде: $\nabla u*\nabla\omega=\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}*\frac{\partial\omega}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}$ $u=\phi_n u_n, \omega=\phi_m$

Предполагается суммирование по одинаковым индексам. Производные переменных математического пространства по физическим переменным x и y определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial y}{\partial\xi_2}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_2}-\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_1}}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial\xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ -\frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_1}\end{bmatrix}$$

Представим область в виде совокупности элементов. В каждом элементе u можно представить в виде $u=\phi_n u_n=\phi_1 u_1+\phi_2 u_2+...+\phi_N u_N$ Отобразим каждый элемент на плоскость (ξ_1,ξ_2) . Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$$\varphi_1=(1-\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}=-(1-\xi_2) \qquad \varphi_4=\xi_1\xi_2 \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_1}=\xi_2$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}=-(1-\xi_1) \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_2}=\xi_1$$

$$\varphi_2 = \xi_1(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} = 1-\xi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = -\xi_1$$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) d\Omega = \int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$$

$$\varphi_3 = (1-\xi_1)\xi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} = -\xi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} = 1-\xi_1$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим:

$$\sum_i u_n \int\limits_{\Omega} k\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\right) d\Omega = \int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\varphi_m\, d\Gamma$$

или $E_{mn}u_n = F_m$, где E – матрица жёсткости, F – вектор нагрузки. Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате. В этом случае E_{11} имеет вид:

$$E_{11} = k\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2\, dxdy$$
$$= \frac{2}{3}k$$

Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы жесткости. Заметим, что если элемент не является единичным квадратом, нам надо переходить от координат (x,y) к координатам (ξ_1, ξ_2) , в этом случае надо в интеграл добавить якобиан перехода. Для единичного квадрата матричное уравнение имеет вид:

$$k\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = RHS$$

Матрица жёсткости симметрична. Обычно область, для которой ищется решение, состоит не из одного квадратного элемента, поэтому на следующем шаге надо получить матрицу жесткости для всей области.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & & \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & & \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \\ & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = RHS$$