Билет 10.

1. Метод граничных элементов для двумерных задач.

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x) = \begin{Bmatrix} \frac{n}{2,}(x) < \frac{1}{n} \\ 0(x) > \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию: $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx = 1$

Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x) h(x) dx = h(\xi), \delta(\xi - x) = H'(\xi - t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi - t) = \begin{Bmatrix} 0\, if \xi < t \\ 1\, if \xi > t \end{Bmatrix}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi - x, \eta - y) = \delta(\xi - x)\delta(\eta - y)$

Фундаментальное решение. Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ, η). Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ, η), поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2 \omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \Theta^2}$ Для $r > 0$ $\delta(\xi - x, \eta - y) = 0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega = A\log r + B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int_D \nabla^2 \omega dD = -\int_D \delta\, dD = -1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon > 0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int_D \nabla^2 \omega dD = \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial n} dS = \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial r} dS = \frac{A}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon = 2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A = -\frac{1}{2\pi}, \omega = -\frac{1}{2\pi}\log r + B$. В принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$

причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int\limits_{\Omega}\nabla^2 u\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части $0=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω, то $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$

2. Построение концептуальной модели.

Основной составляющей объектно-ориентированного анализа или исследования является декомпозиция проблемы на отдельные понятия или объекты. *Концептуальная модель* — это представление понятий в терминах предметной области. На языке UML концептуальная модель представляется в виде набора *статических структурных диаграмм,* на которых не определены никакие операции. Сам термин "концептуальная модель" указывает на строгое соответствие понятиям предметной области, а не программирования. Концептуальная модель может отображать следующее: Понятия, Ассоциации между понятиями, Атрибуты понятий

Концептуальная модель не только предоставляет возможность выполнить декомпозицию проблемы на объекты (понятия), но и помогает сформировать терминологию и составить словарь терминов предметной области. Этот словарь позволяет разработчиками выделить наиболее важные термины и связи между ними.

Концептуальная модель –это не модель структуры программы

Концептуальная модель — это описание системы в терминах предметной области, а не программных элементов.

Артефакты программирования наподобие окон или базы данных, если только разрабатываемая система не является моделью программного средства, например моделью графического интерфейса пользователя.

Обязанности или методы.

Понятие — это представление идеи или объекта. Если говорить более строго, то понятие можно рассматривать в терминах символов, содержания и расширения.

- *Символы* (symbol) — слова или образы, представляющие понятия
- *Содержание* (intension) — определение понятия
- *Расширение* (extension) — набор примеров, к которым применимо понятие

Лучше излишне детализировать концептуальную модель, чем не доопределить ее.

Зачастую на начальной стадии идентификации некоторые понятия упускаются из виду, а появляются позднее, при рассмотрении атрибутов и ассоциаций, или даже на стадии проектирования. Обнаруженные новые понятия добавляются в концептуальную модель.

Приступая к созданию концептуальной модели, целесообразно составить список понятий-кандидатов, руководствуясь следующим перечнем. В нем содержится множество стандартных категорий, которые обычно имеют важное значение. В этом перечне они приводятся в произвольном порядке и не упорядочены по степени важности.

Определение понятий из текстовых описаний

Существует еще один полезный (и очень простой) прием идентификации понятий. Он состоит в выделении существительных из текстовых описаний предметной области и их выборе в качестве "кандидатов на должность" понятия или атрибута.

Этот метод следует применять весьма осторожно. Между существительными и понятиями нет взаимно однозначного соответствия, а слова естественного языка могут иметь несколько значений.

Тем не менее, это информация к размышлению. Для реализации подобного подхода удобно использовать развернутые описания прецедентов.