

## Билет 11.

### 1. Решение двумерной стационарной задачи распределения тепла методом конечных элементов.

$k\nabla^2 u = 0$  Интегральное уравнение, соответствующее этому уравнению, можно записать следующим образом:  $\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u) \omega d\Omega = 0$  При помощи формулы Грина-

Гаусса:  $\int_{\Omega} (f\nabla * \nabla g + \nabla f * \nabla g) d\Omega = \int_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma$  Уравнение можно переписать в виде

$\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u) \omega d\Omega = \int_{\Omega} k\nabla u * \nabla \omega d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma$ . В отсутствии правой части уравнение имеет вид:  $\int_{\Omega} k\nabla u * \nabla \omega d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma$ . Выражение под знаком интеграла в левой

части можно представить в виде:  $\nabla u * \nabla \omega = \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} * \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$   $u = \phi_n u_n, \omega = \phi_m$

Предполагается суммирование по одинаковым индексам. Производные переменных математического пространства по физическим переменным  $x$  и  $y$  определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}$$

Представим

область в виде совокупности элементов. В каждом элементе  $u$  можно представить в виде  $u = \phi_n u_n = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_N u_N$  Отообразим каждый элемент на плоскость  $(\xi_1, \xi_2)$ . Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} &= 1 - \varphi_4 = \xi_1 \xi_2 & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} &= \xi_2 \\ \varphi_2 &= \xi_1(1 - \xi_2) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} &= -\xi_1 & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} &= \xi_1 \end{aligned}$$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= (1 - \xi_1)\xi_2 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} &= -\xi_2 & \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega &= \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma \\ & & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} &= 1 - \xi_1 \end{aligned}$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим:

$$\sum_i u_n \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_m d\Gamma$$

или  $E_{mn} u_n = F_m$ , где  $E$  - матрица жёсткости,  $F$  - вектор нагрузки. Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате. В этом случае  $E_{11}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} E_{11} &= k \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2 dx dy \\ &= \frac{2}{3} k \end{aligned}$$



требования. Для обозначения прецедента используется пиктограмма, изображенная на рисунке



Прецедент является описанием относительно большого, завершенного процесса, в который обычно входит много шагов или транзакций. Как правило, отдельные шаги или виды деятельности в виде прецедента не представляются.

Каждый из последующих шагов определения прецедентов подразумевает использование "атаки мозгового штурма" и анализа имеющихся документов, в которых содержатся спецификации требований.

Один метод, используемый для идентификации прецедентов, основан на анализе исполнителей.

1. Идентифицируйте исполнителей, связанных с системой или организацией.
2. Для каждого исполнителя определите процессы, которые они инициируют или в которых участвуют.

Другой метод основан на анализе событий.

1. Идентифицируйте внешние события, на которые должна реагировать система.
2. Свяжите события с исполнителями и прецедентами.

### **Прецеденты и процессы предметной области**

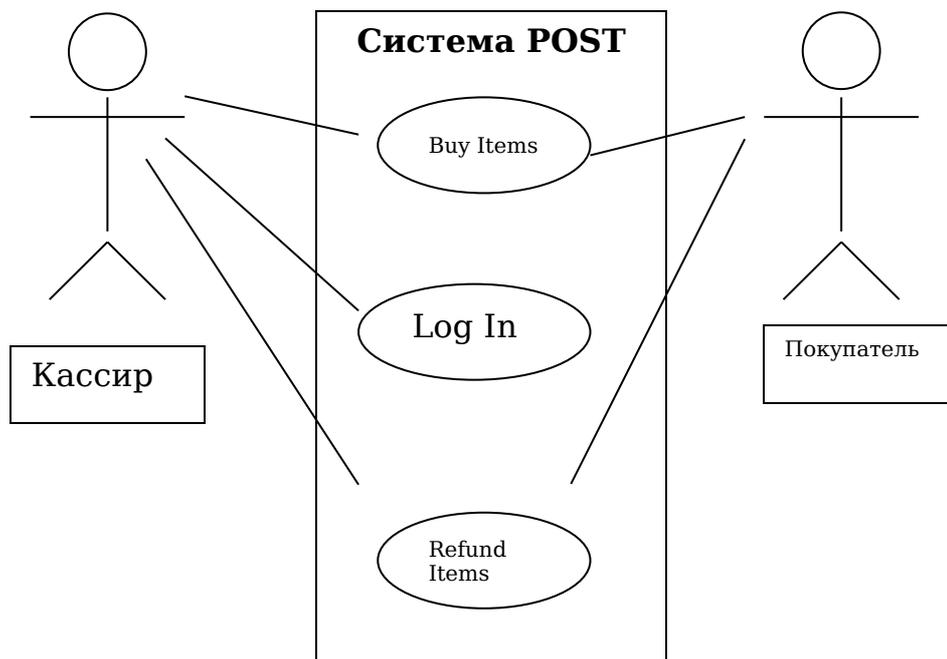
С помощью прецедента описывается некоторый процесс, например обработка деловой информации. *Процесс* (process) от начала и до конца описывает последовательность событий, действий и транзакций, требуемых для достижения какого-либо результата или предоставления некоторого значения организации или исполнителю.

В качестве примера можно привести следующие процессы-

- Получение денег из банкомата.
- Заказ продукции
- Регистрация учебных курсов в школе
- Проверка орфографии в документе, созданном в текстовом процессоре
- Обработка телефонного звонка

### **Диаграммы прецедентов**

Для системы розничной торговли пример диаграммы прецедентов представлен на рисунке



На *диаграмме прецедентов* (use case diagram) иллюстрируется набор прецедентов системы и исполнителей, а также взаимосвязи между ними. Прецеденты представляются овалами, а исполнители — условными обозначениями. Между прецедентами и исполнителями имеются линии взаимодействия. Для отображения потоков данных и влияющих объектов могут использоваться стрелки.

Назначение диаграммы - представить некоторую контекстную диаграмму, позволяющую быстро определить внешних исполнителей системы и ключевые методы их использования.

### *Форматы прецедентов*

На практике, прецеденты могут быть выражены, с различной степенью детализации и связей с проектируемым решением. Другими словами, один и тот же прецедент может быть представлен в различных форматах с разными уровнями детализации. *Прецеденты высокого уровня* описывают процессы очень сжато, обычно в двух или трех предложениях. Такой тип описания удобно использовать на начальном этапе формулирования требований к системе для быстрого осознания степени сложности и функций системы. Прецеденты высокого уровня — это лишь краткое описание, имеющее слабое отношение к конкретным проектным решениям.

*Развернутый прецедент* описывает процесс более детально, чем прецедент высокого уровня. Основной особенностью развернутого прецедента является наличие раздела "Типичный ход событий", в котором описывается последовательность событий. На этапе формулирования требований в развернутом формате целесообразно представлять лишь наиболее важные и значительные прецеденты, а более подробное описание остальных прецедентов отложить до того цикла разработки, в котором они должны быть реализованы.

*Идеальные прецеденты* (essential use cases) — это развернутые прецеденты, выражающие общую сущность процесса без детализации их реализации. Проектные решения, особенно связанные с интерфейсом пользователя, при этом опускаются. Идеальный прецедент описывает процесс в терминах наиболее существенных видов деятельности и обоснований. Степень абстракции идеальных прецедентов может варьироваться, т.е. прецедент может быть идеальным в большей или меньшей степени.

Прецеденты высокого уровня всегда идеальны по своей природе из-за краткости и абстрактности.

В отличие от идеальных *реальные прецеденты* (real use cases) конкретно описывают процесс в терминах реальных проектных решений, на основе конкретных технологий ввода-вывода информации и т.д. Когда речь идет об интерфейсе пользователя, реальные прецеденты зачастую определяют содержимое диалоговых окон и описывают способы взаимодействия с конкретными устройствами.

В идеале реальные прецеденты должны создаваться на стадии проектирования, поскольку они составляют артефакты проектирования. В некоторых проектах на ранних стадиях разработки приходится создавать конкретные проектные решения, относящиеся к интерфейсу пользователя. В таких случаях реальные прецеденты должны создаваться уже на стадии планирования. Однако, реальные прецеденты нежелательно создавать на стадии планирования, поскольку это может привести к чрезмерному усложнению системы. Тем не менее, некоторые организации составляют контракты на разработку программного обеспечения на основе спецификации интерфейса пользователя.