Билет13. Вопрос 1. Процедура ансамблирования в методе конечных элементов.

Ансамблирование. Ансамблирование или сборка представляет собой объединение отдельных элементов в конечно-элементную сетку. С математической точки зрения ансамблирование состоит в объединении матриц жесткости отдельных элементов в одну глобальную матрицу жесткости всей конструкции. При этом существенно используются две системы нумерации узлов элементов: локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого типа конечных элементов в соответствии с введенной локальной системой координат на элементе. Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть совершенно произвольной, также как и глобальная нумерация конечных элементов. Однако, между локальными номерами и глобальными номерами узлов существует взаимнооднозначное соответствие, на основе которого и формируется глобальная система конечно-элементных уравнений.

$k\nabla^2 u=0$ Интегральное уравнение, соответствующее этому уравнению, можно записать следующим образом: $\int\limits_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega\, d\Omega=0$ При помощи формулы Грина-Гаусса: $\int\limits_{\Omega}(f\nabla*\nabla g+\nabla f*\nabla g)d\Omega=\int\limits_{\Gamma} f\frac{\partial g}{\partial n}d\Gamma$ Уравнение можно переписать в виде $\int\limits_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega\, d\Omega=\int\limits_{\Omega} k\nabla u*\nabla\omega\, d\Omega-\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$. В отсутствии правой части уравнение имеет вид: $\int\limits_{\Omega} k\nabla u*\nabla\omega\, d\Omega=\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$. Выражение под знаком интерграла в левой части можно представить в виде: $\nabla u*\nabla\omega=\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}*\frac{\partial\omega}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}$ $u=\phi_n u_n, \omega=\phi_m$ Предполагается суммирование по одинаковым индексам. Производные переменных математического пространства по физическим переменным x и y определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial y}{\partial\xi_2}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_2}-\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_1}}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial\xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ -\frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_1}\end{bmatrix}$$

Представим область в виде совокупности элементов. В каждом элементе u можно представить в виде $u=\phi_n u_n=\phi_1 u_1+\phi_2 u_2+\ldots+\phi_N u_N$ Отобразим каждый элемент на плоскость $(\xi_{1,}\xi_2)$. Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$\varphi_1=(1-$ $\varphi_2=\xi_1(1-\xi_2)$ $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}=1-$ $\varphi_4=\xi_1\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_1}=\xi_2$

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}=-\xi_1$ $\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_2}=\xi_1$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$\varphi_3=(1-\xi_1)\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_1}=-\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_2}=1-\xi_1$

$$\int\limits_{\Omega} k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)d\Omega=\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим:

$$\sum_i u_n \int_\Omega k\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega=\int_\Gamma k\frac{\partial u}{\partial n}\varphi_m\,d\Gamma$$

или $E_{mn}u_n=F_m$, где E – матрица жёсткости, F – вектор нагрузки. Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате. В этом случае E_{11} имеет вид:

$$E_{11}=k\int_0^1\int_0^1 (1-y)^2+(1-x)^2\,dxdy$$
$$=\frac{2}{3}k$$

Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы жесткости. Заметим, что если элемент не является единичным квадратом, нам надо переходить от координат (x,y) к координатам $(\xi_{1,}\xi_2)$, в этом случае надо в интеграл добавить якобиан перехода. Для единичного квадрата матричное уравнение имеет вид:

$$k\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}=RHS$$

Матрица жёсткости симметрична. Обычно область, для которой ищется решение, состоит не из одного квадратного элемента, поэтому на следующем шаге надо получить матрицу жесткости для всей области.

$$\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & & \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & & \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \\ & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\\ u_6\\ u_7\\ u_8\\ u_9\end{bmatrix}=RHS$$

2. Применение метода Монте-Карло для моделирования систем со случайными параметрами.

Рассмотрим метод Монте-Карло на примере вычисления интеграла, значение которого аналитическим способом найти не удается.

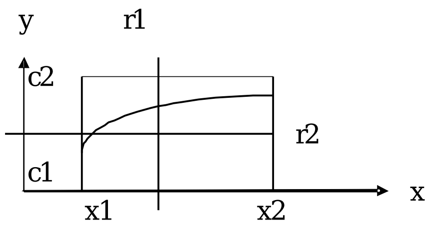
Пример, найти значение

$$y=\int f(x)\cdot dx$$

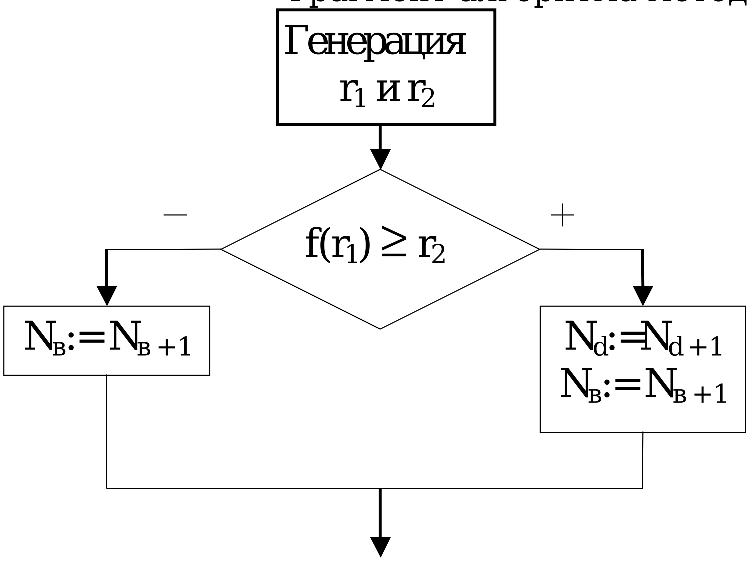
Ограничиваем кривую сверху, справа и слева. Случайным образом распределяем точки в прямоугольнике поиска. Обозначим $N_в$ - количество точек принятых для испытаний, то есть попавших в прямоугольник, N_d - количество точек под кривой, то есть попавших в площадь под интегральной функцией. Тогда естественно предположить, что количество точек, попавших под интегральную кривую, по отношению к общему числу точек пропорционально площади (величине интеграла) по отношению к площади испытуемого прямоугольника. То есть

$$\frac{N_d}{N_{в}} = \frac{y}{(x_2 - x_1)\cdot(C_2 - C_1)}$$

Рассуждения эти, конечно, статистические и тем более верны, чем большее число испытуемых точек мы возьмем.



Фрагмент алгоритма метода Монте-Карло.



Здесь r1 и r2 - равномерно распределенные случайные числа.
Метод крайне эффективен, прост, но необходим “хороший” генератор случайных чисел. Проблема - в определении количества необходимых точек (объем выборки).

Чтобы увеличить точность в 10 раз, объем выборки нужно увеличить в 100 раз.

$$\text{Точность} \sim \sqrt{\text{объём выборки}}$$

Схема использования метода Монте-Карло
при исследовании систем со случайными параметрами

Построив модель системы массового обслуживания, на ее вход подают входные сигналы от генератора случайных чисел (ГСЧ). ГСЧ устроен так, что он выдает равномерно распределенные случайные числа из интервала от 0 до 1. Так как определенные события более вероятны, другие - менее, то равномерно случайные числа от генератора подают на датчик (ДСЧ), который преобразует их в заданный закон распределения вероятности. Далее модель отрабатывает входной сигнал и получает выходной, который является вероятностным событием. Если процедуру повторять многократно, то на выходе появится массив случайных чисел, который формируется в блоке накопления статистики (НС). Далее исследуют вероятностное распределение выходного сигнала в блоке расчета статистических показателей (РСП) и делают заключение о свойствах объекта, который моделируют. В блоке НС анализируют степень достоверности результата и определяют необходимое для этого количество статистических испытаний. При малом числе испытаний результат может оказаться недостоверным. Например, событие А совершилось в результате проведенных двухсот экспериментов 50 раз. Это означает согласно методу Монте-Карло, что вероятность совершения события равна P_A=50/200=0,25. Вероятность того, что событие не совершится, равна соответственно 1-0,25=0,75.

$P := \frac{n_{\text{ñèò}}}{N}$ - оценка вероятности.