Билет 14. Вопрос 1. Метод Кранка-Николсона

Если в схеме FTCS для одномерного уравнения диффузии в правой части взять значения функции в момент времени n+1, то получим полностью неявную схему.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D\left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right]$$

Параметр ξ для этой схемы имеет вид:

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

Эта схема устойчива при любых шагах по времени.

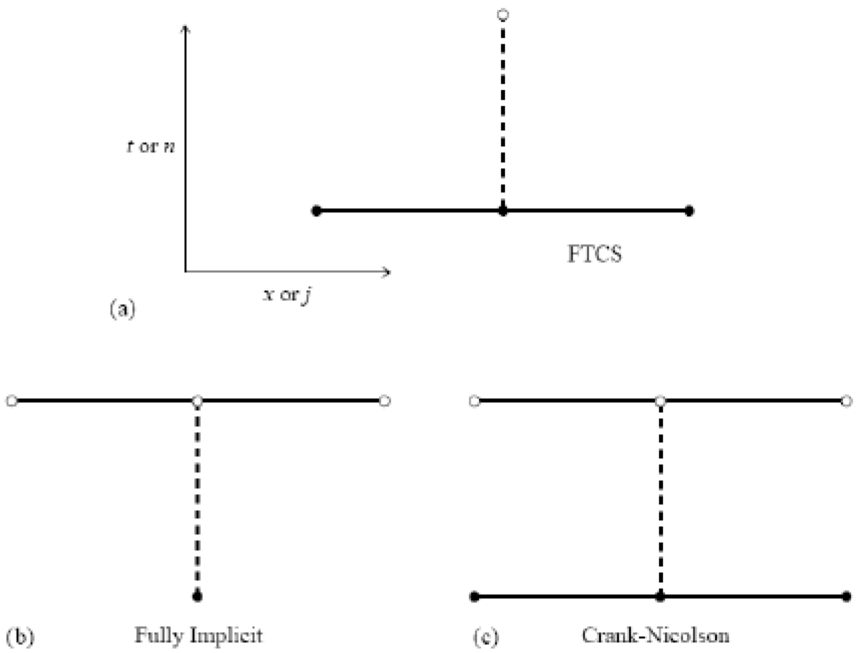
При решении одномерного уравнения диффузии можно сочетать устойчивость неявной схемы с точностью второго порядка по пространству и времени. Представим одномерное уравнение диффузии в разностном виде следующим образом:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{D}{2}\left[\frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{(\Delta x)^2}\right]$$

Параметр ξ для исследования устойчивости по критерию Неймана имеет вид:

$$\xi = \frac{1 - 2\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1 + 2\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

Отсюда следует, что схема стабильна при любом шаге по времени. Эта схема называется схемой Кранка – Николсона и часто применяется для решения диффузионных задач.



На этом рисунке представлены три схемы для решения уравнения диффузии. (a) – FTCS – первого порядка точности, но стабильна только при малых шагах по времени, (b) – стабильная полностью неявная схема первого порядка точности, (c) – схема Кранка - Николсона второго порядка точности стабильная при больших шагах по времени.

Рассмотрим двумерную задачу диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Применим схему Кранка – Николсона к двумерной задаче

$$u_{j,l}^{n+1} = u_{j,l}^{n} + \frac{1}{2}\alpha\left(\delta_x^2 u_{j,l}^{n+1} + \delta_x^2 u_{j,l}^{n} + \delta_y^2 u_{j,l}^{n+1} + \delta_y^2 u_{j,l}^{n}\right)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{D\Delta t}{\Delta^2} \qquad \Delta \equiv \Delta x = \Delta y$$

$$\delta_x^2 u_{j,l}^n \equiv u_{j+1,l}^n - 2u_{j,l}^n + u_{j-1,l}^n$$

Аналогично определяется

$$\delta_y^2 u_{j,l}^n$$

Далее надо решить систему линейных уравнений. Система уже не является трехдиагональной, как в одномерном случае, но является сильно разреженной. Ее можно решать, используя специальную технику применимую для разреженных матриц.

Существует другой способ обобщения одномерного метода Кранка - Николсона на двумерную задачу. При этом также используется схема второго порядка точности по времени и пространству и безусловно стабильная, однако в этом случае получаются алгебраические уравнения, которые решаются проще.

При этом каждый шаг по времени делится на два шага длиной Δt/2 и во время одного шага изменяется одна независимая переменная, например x, а во время другого – переменная y

$$u_{j,l}^{n+1/2} = u_{j,l}^n + \frac{1}{2}\alpha\left(\delta_x^2 u_{j,l}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{j,l}^n\right)$$

$$u_{j,l}^{n+1} = u_{j,l}^{n+1/2} + \frac{1}{2}\alpha\left(\delta_x^2 u_{j,l}^{n+1/2} + \delta_y^2 u_{j,l}^{n+1}\right)$$

При этом на каждом шаге надо решать трехдиагональную систему

2. Метод граничных элементов для двумерных задач.

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x) = \begin{Bmatrix} \frac{n}{2,}|x| < \frac{1}{n} \\ 0|x| > \frac{1}{n} \end{Bmatrix}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx = 1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\omega_n(x)$

Свойства дельта-функции: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1, \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi), \delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\left\{\begin{matrix} 0\, if\, \xi<t \\ 1\, if\, \xi>t \end{matrix}\right\}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η) . Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η) , поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int_D\nabla^2\omega dD=-\int_D\delta dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int_D\nabla^2\omega dD=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi}, \omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. B принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int_\Omega\nabla^2 u\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_\Omega\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части $0=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$