# Метод граничных элементов

## Дельта-функция Дирака

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта - функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине

$$w_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Каждое такое распределение удовлетворяет условию

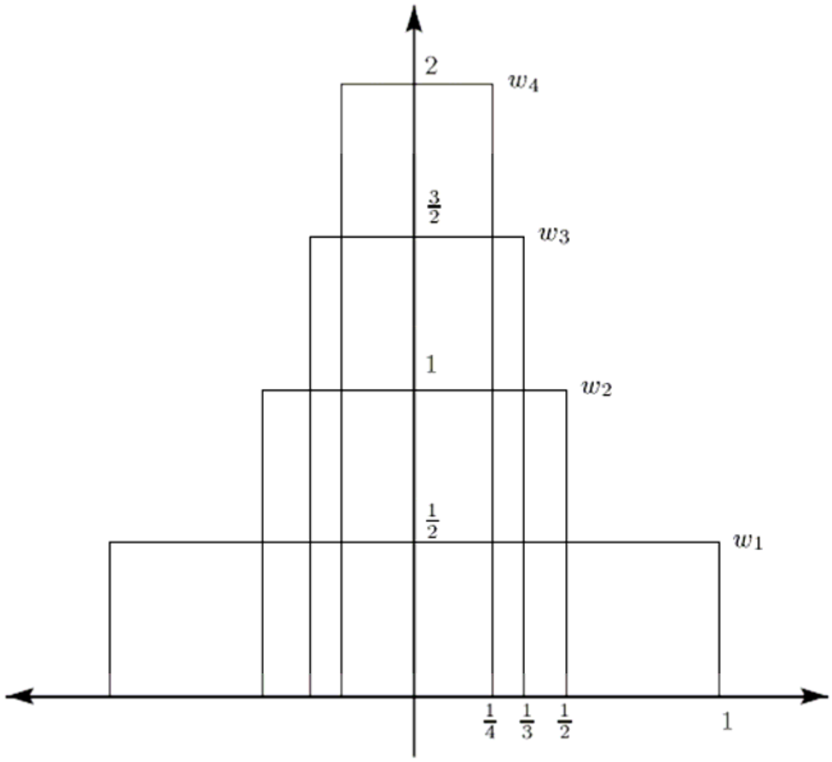
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(x)\, dx = 1$$

Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1.

При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Не строго дельта - функцию можно определить следующим образом:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

(см. рисунок ниже)




Свойства дельта – функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, h(x)\, dx = h(0)$$

Это можно показать следующим образом:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, h(x)\; dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x)\, h(x)\; dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(x)\; dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} h(\xi)\, \frac{2}{n} \\ &= h(0)\end{aligned}$$

Кроме приведенных выше, дельта – функция еще обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x)\, h(x)\; dx = h(\xi)$$

$$\delta(\xi - x) = H'(\xi - t)$$

Дельта – функция – производная функции Хэвисайда

$$H(\xi - t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \xi < t \\ 1 & \text{if } \xi > t \end{cases}$$

Двумерная дельта – функция вводится следующим образом

$$\delta(\xi - x, \eta - y) = \delta(\xi - x)\, \delta(\eta - y)$$

## Фундаментальное решение

Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в области

$$\Omega \in \Re^2.$$

Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0$$

Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке $(\xi, \eta)$.

Это решение должно быть симметрично относительно точки $(\xi, \eta)$, поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Оператор Лапласа запишется в виде

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$$

Для r > 0 $\delta(\xi - x, \eta - y)=0$; учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 0$$

Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид:

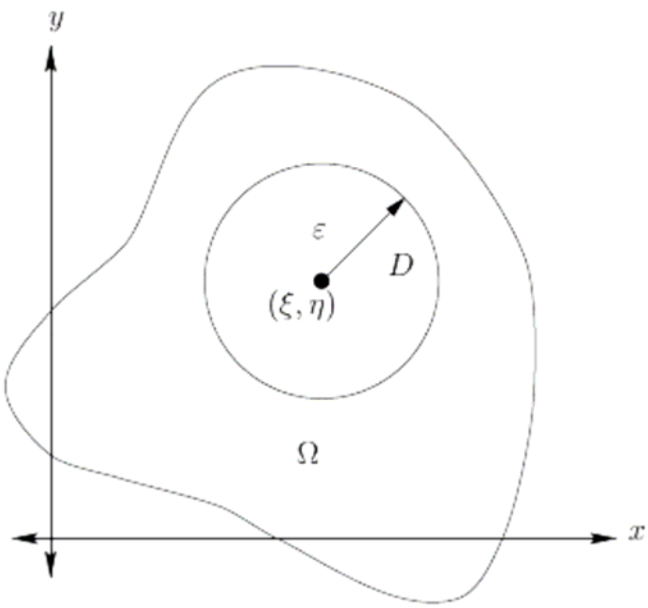
$$\omega = A\log r + B$$

Эта функция сингулярна в точке r = 0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта – функции.

$$\int\limits_D \nabla^2\omega\, dD = -\int\limits_D \delta\, dD = -1$$

Здесь D – любая область, содержащая точку r = 0.

Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r = 0 и радиусом ε > 0 (см. рисунок).



При помощи теоремы Грина – Гаусса оценим интеграл

$$\begin{aligned}\int_D \nabla^2\omega\, dD &= \int_{\partial D} \frac{\partial\omega}{\partial n}\, dS \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial\omega}{\partial r}\, dS \\ &= \frac{A}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon \\ &= 2\pi A\end{aligned}$$

Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т. к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем:

$$A = -\frac{1}{2\pi}.$$

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r + B$$

B принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r \quad \left(= \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}\right)$$

причем

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид:

$$\omega = \frac{1}{4\pi r}$$

## Метод граничных элементов для двумерной задачи

Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина – Гаусса:

$$0 = \int\limits_{\Omega} \nabla^2 u.\omega \, d\Omega = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla\omega \, d\Omega$$

Затем применим теорему Грина – Гаусса еще раз ко второму интегралу в правой части

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla\omega \, d\Omega \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma - \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial \omega}{\partial n} \, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega \end{aligned}$$

В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения, (решение искалось в виде разложения по базисным функциям). В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше.

$$\omega = -\frac{1}{2\pi}\log r$$

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

Используя свойства дельта – функции, получим:

$$\int\limits_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right) \, d\Omega = -u\left(\xi, \eta\right) \quad (\xi, \eta) \in \Omega$$

Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид:

$$\int\limits_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right) \, d\Omega = 0$$

Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде:

$$u\left(\xi, \eta\right) + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial\omega}{\partial n} \, d\Gamma = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\omega \, d\Gamma \quad (\xi, \eta) \in \Omega$$

Это уравнение содержит только интегралы по границе.

Если точка $(\xi, \eta)$ находится вне $\Omega$, то

$$\int\limits_{\Omega} u\nabla^2\omega \, d\Omega = -\int\limits_{\Omega} u\delta\left(\xi - x, \eta - y\right) \, d\Omega = 0$$

Если точка $(\xi, \eta)$ лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением:

$$\frac{1}{2} u\left(\xi, \eta\right)\Big|$$