Билет 15.

1. **Метод SOR.**

Рассмотрим методы Якоби и Гаусса-Зейделя с точки зрения представления матриц в виде суммы. Заменим обозначение u на x, чтобы получить стандартный вид матричного уравнения.

$$A \cdot x = b \tag{4.7}$$

Мы можем представить матрицу A в виде

$$A = L + D + U \tag{4.8}$$

Здесь –D –диагональная часть матрицы A, L – нижняя треугольная часть матрицы A, U – верхняя треугольная часть матрицы A, матрицы L, U содержат нули на диагонали. При использовании метода Якоби итерацию на r –м шаге можно записать в виде:

$$D \cdot x^{(r)} = -(L+U) \cdot x^{(r-1)} + b \tag{4.9}$$

Матрица $-D^{-1}*(L+U)$ – итерационная матрица при помощи которой находится следующее итерационное приближение. Была произведена для этого метода оценка числа итераций, необходимых для достижения точности 10^{-p}

$$r \approx \frac{p \ln 10}{(-\ln p_s)} \tag{4.10}$$

При увеличении размерности сетки J спектральный радиус p_s стремится к единице. Для данного конкретного уравнения, граничных условий и геометрии сетки спектральный радиус, в принципе, можно вычислить аналитически, так для сетки размерности J*J с условиями Дирихле на всех четырех границах, асимптотическая формула для больших J имеет вид:

$$p_s \simeq 1 - \frac{\pi^2}{2J^2} \tag{4.11}$$

При этом необходимое число итераций можно оценить по формуле:

$$r \simeq \frac{2pJ^2 \ln 10}{\pi^2} \simeq \frac{1}{2} pJ^2 \tag{4.12}$$

Другими словами, число итераций пропорционально числу точек сетки.

Методу Гаусса-Зейделя соответствует следующее матричное уравнение:

$$(L+D) \cdot x^{(r)} = -U \cdot x^{(r-1)} + b \tag{4.13}$$

Для рассматриваемой нами модели спектральный радиус и число итераций можно оценить по формулам:

$$p_s \simeq 1 - \frac{\pi^2}{J^2} \tag{4.14}$$

$$r \simeq \frac{pJ^2 \ln 10}{\pi^2} \simeq \frac{1}{4} pJ^2 \tag{4.15}$$

Метод Sor.

Мы получим лучший алгоритм – один из самых распространенных до семидесятых годов прошлого века - если мы скорректируем величину $\mathbf{x}^{(r)}$ на r-м шаге итераций Гаусса-Зейделя. Из метода Гаусса-Зейделя следует:

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-(L+D)^{-1}\cdot[(L+D+U)\cdot x^{(r-1)}-b] \tag{4.16}$$

Член в квадратных скобках –вектор невязки $\xi^{(r-1)}$ т.е.

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-(L+D)^{-1}\cdot\xi^{(r-1)} \tag{4.17}$$

Для улучшения сходимости введем так называемый параметр «сверхрелаксации» ω:

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-\omega(L+D)^{-1}\cdot\xi^{(r-1)} \tag{4.18}$$

Метод, использующий эту схему, назвали методом SOR (successive overrelaxation).

Можно доказать следующие теоремы:

Метод сходится только для $0 < \omega < 2$, если $0 < \omega < 1$, то говорят о недостаточно быстрой релаксации

При определенных математических ограничениях, которым удовлетворяют матрицы, получающиеся в методах конечных разностей только при $1 < \omega < 2$ этот метод сходится быстрее метода Гаусса-Зейделя.

Если ρ_{Jacobi} спектральный радиус итерационной схемы Якоби, квадрат его – спектральный радиус метода Гаусса-Зейделя), то оптимальное значение ω имеет вид:

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho_{Jacobi}^2}} \tag{4.19}$$

Спектральный радиус при этом равен

$$\rho_{SOR}=\left(\frac{\rho_{Jacobi}}{1+\sqrt{1-\rho_{Jacobi}^2}}\right)^2 \tag{4.20}$$

Если использовать выражение для радиуса Якоби из формулы (4.11), то получим:

$$\omega\simeq\frac{2}{1+\pi/J} \tag{4.21}$$

$$\rho_{SOR}\simeq1-\frac{2\pi}{J} \tag{4.22}$$

Для достижения точности 10^{-p} необходимо следующее число итераций:

$$r\simeq\frac{pJ\ln10}{2\pi}\simeq\frac{1}{3}pJ$$

(4.23)

Отсюда следует, что метод SOR для достижения точности 10^{-p} требует количества итераций, пропорционального J, а не J^2 .

При помощи этого численного метода можно с успехом решать граничные задачи для уравнений в частных производных.

2. Описание системных операций.

Системные события и операции

Системное событие (system event) — это внешнее входное событие, сгенерированное для системы исполнителем. Событие инициирует выполнение определенной операции. Системная операция (system operation) является операцией, которую система выполняет в ответ на сгенерированное событие. Например, если кассир генерирует системное событие enterltem, то это приводит к выполнению системной операции enterltem. Имена, события и операции идентичны. Различие между ними заключается в том, что событие является именованным стимулирующим воздействием, а операция представляет собой реакцию на это воздействие.

Запись системных операций

Набор всех требуемых системных операций определяется путем идентификации системных событий. Вместе с параметрами они имеют следующий вид:

• enterItem(UPC, quantity)
• endSale()
• makepayment(amount)

Где же эти операции должны быть записаны? В языке UML операции записываются как тип.

В соответствии с приведенной системой обозначений операции могут быть сгруппированы как операции типа с именем System. При этом параметры можно не указывать.

Такую схему можно без проблем использовать для записи системных операций нескольких систем или процессов распределенного приложения. В этом случае каждой системе ставится в соответствие уникальное имя (System1, System2, ...) и назначаются собственные системные операции.

Представление типа System существенно отличается от объектов, помещаемых в концептуальную модель. Ее элементы иллюстрируют понятия реального мира, а тип System представляет собой искусственно созданную конструкцию.