Билет 16

Нестабильность схемы FTCS. Метод Лакса.

Задачи с начальными условиями для уравнения сохранения потока.

Большой класс одномерных задач с начальными условиями можно привести к уравнению сохранения потока: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x}$ (2.1) где **u** и **F** векторы, и в некоторых случаях **F** зависит не только от **u**, но и от пространственных производных от **u**.

Например для одномерного волнового уравнения с постоянной скоростью распространения волны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$ (2.2) можно написать два уравнения первого порядка

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v\frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = v\frac{\partial r}{\partial x}$$ (2.3) где $$r = v\frac{\partial u}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial u}{\partial t}$$ (2.4) В этом случае r и s – две компоненты **u**, а поток определяется линейным матричным уравнением $\mathrm{F(u)} = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{u}$ (2.5)

Уравнения (2.3) аналогичны уравнениям Максвелла для одномерной электромагнитной волны. Рассмотрим уравнение для скалярной величины u $\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$ (2.6) Общее решение этого уравнения – волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x. $u = f(x\text{-}vt)$ (2.7)

Введем дискретные точки по x и t $x_j = x_0 + j\Delta x$ $j=0,1,\ldots,J$ $t_n = t_0 + n\Delta t$ $n=0,1,\ldots,N$ (2.8)

Пусть u_j обозначает $u(t_n,x_j)$. Мы можем различными способами представить производную по времени, самый очевидный: $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j,n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$

(2.9) Это приближение первого порядка точности по временному шагу. Для пространственной производной используем приближение второго порядка.

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j,n} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$ (2.10) Тогда конечно-разностная аппроксимация рассматриваемого уравнения, называемая FTCS (Forward Time Centered Space) примет вид: $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$ (2.11) Это выражение легко представляется как выражение для u_j в момент времени n+1. Это явная схема, т.е. u_j в момент времени n+1 можно вычислить явно по известным величинам. FTCS алгоритм - это пример одноуровневой схемы, т.е. для нахождения u_j в момент времени n+1 достаточно значений в момент времени n.

Анализ стабильности фон Неймана

Представим, что коэффициенты рассматриваемых уравнений с частными производными меняются очень слабо в пространстве и времени, и их можно считать постоянными. В этом случае независимые решения или собственные моды уравнений можно искать в виде $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$ (2.12)

где k действительное пространственное волновое число, которое может принимать любое значение, и ξ=ξ(k) – комплексное волновое число, которое зависит от k. Временная зависимость единственной собственной моды ни что иное, как последовательные (возрастающие) целые степени комплексной величины ξ. Следовательно, разностные уравнения нестабильны, если |ξ(k)|>1 для каких-то значений k. Подставляя (.1.12) в (.1.11), получим $\xi(k) = 1 - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$ (2.13)

Как видно из этого выражения |ξ(k)|>1 **для всех k**, т.е. схема FTCS нестабильна.

Несмотря на возможно недостаточную строгость метода фон Неймана, он практически всегда дает верный ответ.

Метод Лакса.

Простое изменение схемы, предложенное Лаксом, позволило улучшить ситуацию. Он предложил заменить значение функции u в узле j в момент времени n в производной по времени на среднее значение в узлах j-1 и j+1. Это привело к следующему выражению:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

(2.15) В этом случае для величины ξ получим:

$$\xi = \cos k\Delta x - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x$$

(2.16) Условие стабильности - квадрат модуля |ξ| должен быть меньше или равен единицы_ приводит к условию: $\frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \le 1$ (2.17)

Это знаменитый критерий стабильности Куранта – Фридриха – Леви. Сравнитм схему Лакса и FTCS, для этого перепишем схему Лакса в виде:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t}\right) \qquad (2.18)$$

Но это схема FTCS для уравнения: $\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\nabla^2 u$ (2.19)

Т.е. в уравнении появился “диссипационный” член. Если |v|Δt в точности не равно Δx, то амплитуда волны спадает.

Диаграммы кооперации

Введение

Постусловия для системных операций startup, enterItem, endSale и makePayment достаточно полно были представлены в описаниях операций. Однако в описаниях нет представления того, как программные объекты обеспечивают выполнение постусловий.

В состав языка UML входят диаграммы взаимодействий (interaction diagrams). Они иллюстрируют способ взаимодействия объектов с помощью сообщений и обеспечивают выполнение необходимых задач. Ниже создание диаграмм взаимодействий будет рассмотрено на примере системы розничной торговли.

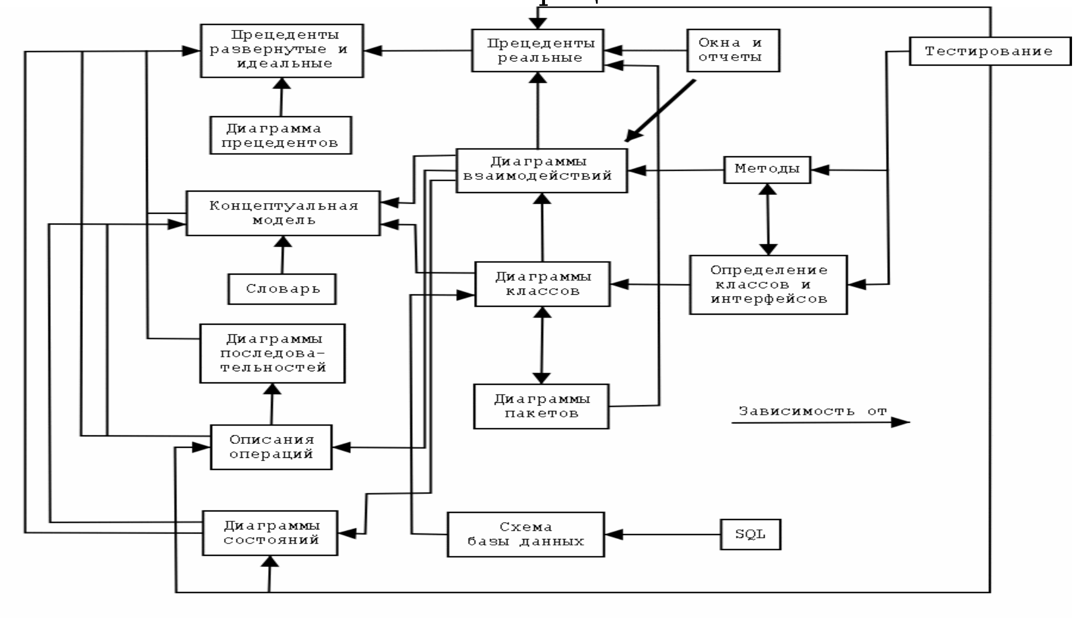
Виды деятельности и зависимости

Диаграммы взаимодействий создаются на стадии проектирования цикла разработки. Их создание зависит от следующих созданных ранее артефактов.

• Концептуальная модель. С ее помощью разработчик может определить программные классы, соответствующие понятиям. Объекты этих классов участвуют во взаимодействиях, иллюстрируемых на диаграммах взаимодействий.

• Описание системных операций. С помощью описаний разработчик идентифицирует обязанности и постусловия, которым должны удовлетворять диаграммы взаимодействий.

• Реальные (или идеальные) прецеденты. Из описания прецедентов разработчик может почерпнуть информацию о том, выполнению каких задач должны удовлетворять диаграммы взаимодействий. Эта информация дополняет данные, содержащиеся в описаниях системных операций.



Зависимости артефактов на стадии построения

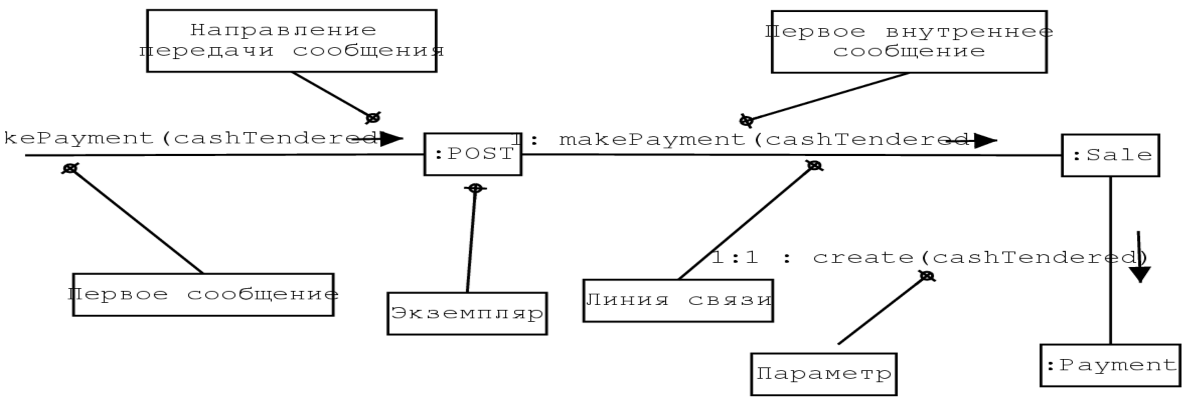
Пример диаграммы кооперации: makePayment

Показанная на рисунке ниже диаграмма кооперации должна интерпретироваться следующим образом.

1. Сообщение «make Payment» передается экземпляру объекта POST. Оно соответствует системной операции make Payment.

2. Объект POST передает сообщение «makePayment экземпляру объекта Sale.

3. Объект Sale создает экземпляр объекта Payment.



Создание диаграмм кооперации

При создании диаграмм кооперации руководствуйтесь следующими рекомендациями.

1. В текущем цикле разработки создавайте отдельную диаграмму для каждой системной операции.

Для сообщения системной операции разрабатывайте диаграмму таким образом, чтобы это сообщение было входным.

2. Если диаграмма оказалась слишком сложной (например, ее очень трудно разместить на листе бумаги формата А4), разбейте ее на диаграммы меньшего размера.

3. В качестве отправной точки используйте обязанности и постусловия, указанные в описании операции, а также описание прецедентов. Разрабатывайте диаграмму взаимодействий с учетом решения этих задач. Для создания профессиональных диаграмм применяйте GRASP и другие шаблоны,

Диаграммы кооперации и другие артефакты

В прецедентах неявно представлены системные события, которые явно отображаются на диаграммах последовательностей

• Наилучшие исходные предположения о результатах выполнения системных операций описываются в контрактах

• Системные операции определяют сообщения, которые являются отправной точкой создания диаграмм взаимодействий; эти диаграммы иллюстрируют, как объекты взаимодействуют между собой и обеспечивают выполнение поставленных задач

Основные обозначения для диаграмм кооперации

Отображение классов и экземпляров объектов

В языке UML для иллюстрации экземпляров объектов используется простой и непротиворечивый подход.

• Для экземпляра любого элемента языка UML (класса, исполнителя и т.д.) используется то же графическое обозначение, что и для типа, однако при этом соответствующая определяющая строка подчеркивается.

Таким образом, для отображения экземпляра класса на диаграмме взаимодействий используется обычное, графическое, условное обозначение класса, однако при этом его имя подчеркивается. Кроме того, на диаграмме кооперации перед именем класса всегда должно указываться двоеточие (:).

Наконец, для уникальной идентификации экземпляра класса может использоваться его имя.

Отображение связей

Связь (link) является соединением между двумя экземплярами классов, определяющим некоторую форму перемещения и видимости между ними. Более строго можно сказать, что связь является экземпляром ассоциации. При взаимодействии клиента с сервером имеется два таких экземпляра. Существование маршрута перемещения от клиента к серверу означает, что сообщения могут передаваться от клиента серверу. Например, имеется связь, или маршрут перемещения, от объекта POST к объекту Sale, в соответствии с которым могут передаваться сообщения, такие как addPayment.