Билет 18. Вопрос 1. Решение двумерной и трехмерной задач теплопроводности методом конечных элементов.

$k\nabla^2 u=0$ Интегральное уравнение, соответствующее этому уравнению, можно записать следующим образом: $\int\limits_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega d\Omega=0$ При помощи формулы Грина-Гаусса: $\int\limits_{\Omega}(f\nabla*\nabla g+\nabla f*\nabla g)d\Omega=\int\limits_{\Gamma} f\frac{\partial g}{\partial n}d\Gamma$ Уравнение можно переписать в виде $\int\limits_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega d\Omega=\int\limits_{\Omega} k\nabla u*\nabla\omega d\Omega-\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma$. В отсутствии правой части уравнение имеет вид: $\int\limits_{\Omega} k\nabla u*\nabla\omega d\Omega=\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma$. Выражение под знаком интерграла в левой части можно представить в виде: $\nabla u*\nabla\omega=\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}*\frac{\partial\omega}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_k}$ $u=\varphi_n u_n,\omega=\varphi_m$

Предполагается суммирование по одинаковым индексам. Производные переменных математического пространства по физическим переменным x и y определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial y}{\partial\xi_2}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_2}-\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_1}}\begin{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial\xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\\ -\frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_1}\end{bmatrix}$$

Представим

область в виде совокупности элементов. В каждом элементе u можно представить в виде $u=\varphi_n u_n=\varphi_1 u_1+\varphi_2 u_2+\ldots+\varphi_N u_N$ Отобразим каждый элемент на плоскость (ξ_1,ξ_2). Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$\varphi_1=(1-$ $\varphi_2=\xi_1(1-\xi_2)$ $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}=1-$ $\varphi_4=\xi_1\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_1}=\xi_2$

$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2}=-\xi_1$ $\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_2}=\xi_1$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$\varphi_3=(1-\xi_1)\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_1}=-\xi_2$ $\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_2}=1-\xi_1$

$$\int\limits_{\Omega} k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)d\Omega=\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\, d\Gamma$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим:

$$\sum_i u_n\int\limits_{\Omega} k\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\right)d\Omega=\int\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\varphi_m\, d\Gamma$$

или $E_{mn}u_n=F_m$, где E – матрица жёсткости, F – вектор нагрузки. Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате. В этом случае E_{11} имеет вид:

$$E_{11} = k \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2 \, dxdy$$
$$= \frac{2}{3} k$$

Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы жесткости. Заметим, что если элемент не является единичным квадратом, нам надо переходить от координат (x,y) к координатам $\left(\xi_{1,}\xi_2\right)$, в этом случае надо в интеграл добавить якобиан перехода. Для единичного квадрата матричное уравнение имеет вид:

$$k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = RHS$$

Матрица жёсткости симметрична. Обычно область, для которой ищется решение, состоит не из одного квадратного элемента, поэтому на следующем шаге надо получить матрицу жесткости для всей области.

Ансамблирование. Ансамблирование или сборка представляет собой объединение отдельных элементов в конечно-элементную сетку. С математической точки зрения ансамблирование состоит в объединении матриц жесткости отдельных элементов в одну глобальную матрицу жесткости всей конструкции. При этом существенно используются две системы нумерации узлов элементов: локальная и глобальная. Локальная нумерация представляет собой фиксированную нумерацию узлов для каждого типа конечных элементов в соответствии с введенной локальной системой координат на элементе. Глобальная нумерация узлов всей конструкции может быть совершенно произвольной, также как и глобальная нумерация конечных элементов. Однако, между локальными номерами и глобальными номерами узлов существует взаимнооднозначное соответствие, на основе которого и формируется глобальная система конечно-элементных уравнений.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & & \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & & \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \\ & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = RHS$$

2. Статистическое моделирование. Методы генерации случайных чисел.

Статистическое моделирование - базовый метод моделирования, заключающийся в том, что модель испытывается множеством случайных сигналов с заданной плотностью вероятности. Целью является статистическое определение выходных результатов. В основе статистического моделирования лежит метод Монте-Карло.

Генератор случайных чисел (ГСЧ)

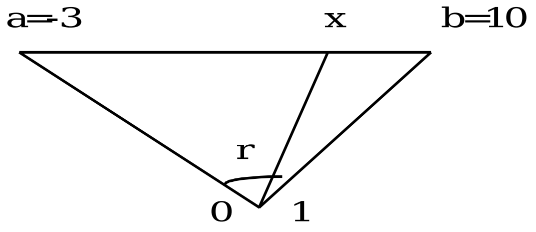
Основа метода Монте-Карло - ГСЧ, равномерно распределенных в интервале (0,1). Такая последовательность чисел должна обладать математическим ожиданием и дисперсией.

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} = 0.5 \qquad D_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - m_r)^2}{n} = \frac{1}{12}$$

Если окажется, что случайные числа должны быть распределены в другом интервале, то преобразование имеет вид:

ГСЧ рр(a,b)

$$x := a + (b - a) \cdot r$$



Теперь x - случайное число, равномерно распределенное в диапазоне от a до b.

ГСЧ порождает случайный поток событий с равномерным законом распределения. При одном обращении выпадает одно случайное число.

Если числа изучать и откладывать на графике, то получим кривую - экспериментальную плотность распределения случайных чисел.

Следует запомнить, что генерация произвольного случайного числа состоит из двух этапов:

1. генерация нормализованного случайного числа (равномерно распределенного от 0 до 1);
2. преобразование случайного числа в произвольный закон распределения.

ГСЧ делятся на:

- физические;
- табличные;
- алгоритмические.

Физические ГСЧ

- монета (“орел” - 1, “решка” - 0)

  $\underline{1011}$ $\underline{0011}$ $\underline{0111}$

  B 3 7
- игральные кости
- разделенный на сектора вращающийся барабан со стрелкой
- аппаратурный генератор шума (ГШ). В качестве ГШ используют шумящее тепловое устройство, например транзистор.

Алгоритмические ГСЧ

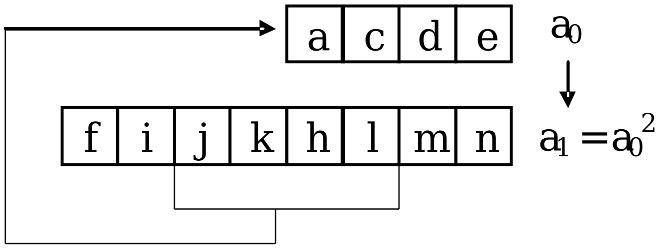
Эти числа всегда квазислучайные (то есть следующее сгенерированное число зависит от предыдущего)

$$r = f(r_{i-1})$$

Достоинства данных ГСЧ: компактны, быстродействующие, не требуют ресурсов памяти. Имеется несколько алгоритмических методов получения ГСЧ.

Метод серединных квадратов

Имеется четырехзначное число.
Возводим его в квадрат.
Из a_1 берется середина и записывается в a_0, далее процедура повторяется.



Недостатки:

- если на очередной итерации получится ноль, то датчик вырождается,
- для качества генератора важно - какое взято начальное значение,
- датчик будет повторять последовательность через 2^n шагов (2^4 для нашего случая).