Билет 19. Вопрос 1. Основы метода граничных элементов для трехмерных задач

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x)=\begin{Bmatrix} \frac{n}{2,}(x)<\frac{1}{n} \\ 0(x)>\frac{1}{n} \end{Bmatrix}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx=1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1, \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi), \delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\begin{Bmatrix} 0 if\xi<t \\ 1 if\xi>t \end{Bmatrix}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η). Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η), поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=-\int\limits_D \delta dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi}, \omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. В принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int\limits_{\Omega}\nabla^2 u\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части $0=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то $\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$

2. Диаграммы кооперации для системных операций.

В состав языка UML входят диаграммы взаимодействий (interaction diagrams). Они иллюстрируют способ взаимодействия объектов с помощью сообщений и обеспечивают выполнение необходимых задач.

Диаграммы взаимодействий создаются на стадии проектирования цикла разработки. Их создание зависит от следующих созданных ранее артефактов.

• Концептуальная модель. С ее помощью разработчик может определить программные классы, соответствующие понятиям. Объекты этих классов участвуют во взаимодействиях, иллюстрируемых на диаграммах взаимодействий.

• Описание системных операций. С помощью описаний разработчик идентифицирует обязанности и постусловия, которым должны удовлетворять диаграммы взаимодействий.

• Реальные (или идеальные) прецеденты. Из описания прецедентов разработчик может почерпнуть информацию о том, выполнению каких задач должны удовлетворять диаграммы взаимодействий. Эта информация дополняет данные, содержащиеся в описаниях системных операций.

Создание диаграмм кооперации

При создании диаграмм кооперации руководствуйтесь следующими рекомендациями.

1. В текущем цикле разработки создавайте отдельную диаграмму для каждой системной операции. Для сообщения системной операции разрабатывайте диаграмму таким образом, чтобы это сообщение было входным.
2. Если диаграмма оказалась слишком сложной (например, ее очень трудно разместить на листе бумаги формата А4), разбейте ее на диаграммы меньшего размера.
3. В качестве отправной точки используйте обязанности и постусловия, указанные в описании операции, а также описание прецедентов. Разрабатывайте диаграмму взаимодействий с учетом решения этих задач. Для создания профессиональных диаграмм применяйте GRASP и другие шаблоны,

Диаграммы кооперации и другие артефакты

В прецедентах неявно представлены системные события, которые явно отображаются на диаграммах последовательностей

- Наилучшие исходные предположения о результатах выполнения системных операций описываются в контрактах
- Системные операции определяют сообщения, которые являются отправной точкой создания диаграмм взаимодействий; эти диаграммы иллюстрируют, как объекты взаимодействуют между собой и обеспечивают выполнение поставленных задач

Основные обозначения для диаграмм кооперации

Отображение классов и экземпляров объектов

В языке UML для иллюстрации экземпляров объектов используется простой и непротиворечивый подход.

- Для экземпляра любого элемента языка UML (класса, исполнителя и т.д.) используется то же графическое обозначение, что и для типа, однако при этом соответствующая определяющая строка подчеркивается.

Таким образом, для отображения экземпляра класса на диаграмме взаимодействий используется обычное, графическое, условное обозначение класса, однако при этом его имя подчеркивается. Кроме того, на диаграмме кооперации перед именем класса всегда должно указываться двоеточие (:).

Наконец, для уникальной идентификации экземпляра класса может использоваться его имя.

Отображение связей

Связь (link) является соединением между двумя экземплярами классов, определяющим некоторую форму перемещения и видимости между ними. Более строго можно сказать, что связь является экземпляром ассоциации. При взаимодействии клиента с сервером имеется два таких экземпляра. Существование маршрута перемещения от клиента к серверу означает, что сообщения могут передаваться от клиента серверу. Например, имеется связь, или маршрут перемещения, от объекта POST к объекту Sale, в соответствии с которым могут передаваться сообщения, такие как addPayment.