Билет 20. Вопрос 1. Метод граничных элементов для двумерных задачПрежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x)=\begin{cases} \frac{n}{2}, (x)<\frac{1}{n} \\ 0 (x)>\frac{1}{n} \end{cases}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx=1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x)=\lim_{n\to\infty} \omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx=1, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi), \delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\begin{cases} 0 \, if \xi<t \\ 1 \, if \xi>t \end{cases}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η). Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η), поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=-\int\limits_D \delta\, dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi}, \omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. В принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int_{\Omega}\nabla^2 u\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части $0=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$

2. Использование унифицированного языка моделирования UML для объектно-ориентированного анализа и проектирования.

Объектно-ориентированное моделирование

При компьютерном моделировании сложных систем с успехом используются объектно-ориентированные языки.

Владение объектно-ориентированным языком программирования (например, Java) и доступ к обширной библиотеке ресурсов составляют необходимое, но не достаточное условие для создания объектной системы. Очень важную роль в процессе ее разработки играют анализ и проектирование системы с точки зрения объектной методологии.

Аббревиатура UML означает Unified Modeling Language (унифицированный язык моделирования). Этот язык представляет собой систему обозначений, которая базируется на диаграммах и предназначается для моделирования систем на основе объектно-ориентированного подхода.

1• Как распределить обязанности между классами и объектами? Как должны взаимодействовать объекты? Какие функции выполняют конкретные классы? Эти вопросы являются определяющими при разработке системы. Некоторые проверенные временем решения проблем, возникающих в процессе разработки, могут быть (и были) сформулированы в виде набора принципов, эвристик или шаблонов (patterns) — именованных формул решения проблем, позволяющих систематизировать процесс разработки конкретных систем.

Унифицированный язык моделирования UML

UML — это "язык для определения, визуализации и конструирования артефактов программных систем" Это система обозначений (включая семантику), предназначенная для моделирования систем на основе объектно-ориентированного подхода.

UML— это важный производственный стандарт для объектно-ориентированного моделирования. Он появился в 1994 году в результате совместных усилий Гради Буча (Grady Booch) и Джима Румбаха (Jim Rumbaugh) по объединению их популярных методов — метода Буча и OMT (Object Modeling Technique). Впоследствии эти две методология были объединены Айваром Якобсоном (Ivar Jacobson), создателем метода OOSE (Object-oriented Software Engineering). В ответ на запрос группы промышленных стандартов OMG (Object Management Group) об определении стандартного языка моделирования и общепринятой системы обозначений в качестве кандидата в 1997 году был представлен язык UML.

Группа OMG сертифицировала UML, который к тому времени де-факто получил одобрение специалистов многих крупных компаний, Многие организации, специализирующиеся на разработке программного обеспечения, и производители CASE-средств также приняли UML. Поэтому с высокой вероятностью можно утверждать, что этот язык станет мировым стандартом для разработчиков, авторов и производителей CASE-средств.

Полное описание системы обозначений UML можно найти на Web-узле группы OMG по адресу www.omg.org.

Для представления артефактов объектно-ориентированного анализа и проектирования существует порядка десяти различных систем-обозначений. Эта ситуация затрудняет эффективное сотрудничество между группами разработчиков, обучение и использование CASE-средств. Авторы UML— Буч, Якобсон и Румбах — создали стандартизированный, элегантный, выразительный и гибкий язык моделирования и тем самым внесли значительный вклад в развитие объектной технологии проектирования.

UML— это язык моделирования, а не руководство разработчика по объектно-ориентированному анализу и проектированию.

Естественно, методы, модели и средства создания эффективных, программных систем будут развиваться и в дальнейшем. Однако лишь сейчас специалисты получили возможность пользоваться единым языком — UML.

Анализ и проектирование

Для создания программного приложения необходимо описать проблему и требования к системе. Этап анализа (analysis) состоит в исследовании проблемы, а не в поисках путей ее решения. Например, при разработке новой информационной системы для компьютерной **библиотеки** необходимо описать экономические процессы, связанные с ее использованием, При разработке приложения необходимо также обеспечить высокий уровень и подробное описание логики решения, удовлетворяющего требованиям к системе и налагаемым ограничениям. В процессе проектирования(design) основное внимание уделяется логическому решению, обеспечивающему выполнение основных требований. Например, как на самом деле будет функционировать информационная библиотечная система? Безусловно, проект может быть реализован в виде аппаратных средств и программного обеспечения.

Объектно-ориентированный анализ и проектирование

Основная идея объектно-ориентированного анализа и проектирования (object-oriented analysis and design) состоит в рассмотрении предметной области и логического решения задачи с точки зрения объектов (понятий или сущностей).

В процессе объектно-ориентированного анализа основное внимание уделяется определению и описанию объектов (или понятий) в терминах предметной области. Например, в случае библиотечной информационной системы среди понятий должны присутствовать Book(книга), Library (библиотека) и Patron(клиент).

В процессе объектно-ориентированного проектирования определяются логические программные объекты, которые будут реализованы средствами объектно-ориентированного языка программирования. Эти программные объекты включают в себя атрибуты и методы. Например, в библиотечной **системе** программный объект Book может содержать атрибут title (название) и **метод** print (печатать)

И наконец, в процессе конструирования (construction) или объектно-ориентированно программирования (object-oriented programming) обеспечивается реализация разработанных компонентов, таких как класс Book на языке C++, Java. Smalltalk или Visual Basic.