Билет 22.

1. Дельта-функция Дирака и фундаментальные решения.

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x)=\begin{cases} \frac{n}{2}, |x|<\frac{1}{n} \\ 0 |x|>\frac{1}{n} \end{cases}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию:

$\int_{-\infty}^{\infty}\omega_n dx=1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1, \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами:

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi), \delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\begin{cases} 0 \, if \, \xi<t \\ 1 \, if \, \xi>t \end{cases}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η). Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η), поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде

$\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int_D\nabla^2\omega dD=-\int_D\delta dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл

$\int_D\nabla^2\omega dD=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi}, \omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. В принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса:

$0=\int\limits_{\Omega}\nabla^2 u\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части

$0=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим:

$\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид

$\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то

$\int\limits_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int\limits_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$

2. Ассоциации и атрибуты концептуальной модели.

Построение концептуальной модели

Концептуальная модель отображает основные (с точки зрения моделирующего) понятия предметной области. Она является наиболее важным артефактом, создаваемым на этапе объектно-ориентированного анализа.

Важным свойством концептуальных моделей является представление понятий реального мира, а не программных компонентов.

Концептуальная модель — это представление понятий в терминах предметной области. На языке UML концептуальная модель представляется в виде набора *статических структурных диаграмм,* на которых не определены никакие операции. Сам термин "концептуальная модель" указывает на строгое соответствие понятиям предметной области, а не программирования .Концептуальная модель может отображать следующее.

- Понятия
- Ассоциации между понятиями
- Атрибуты понятий

Концептуальная модель: добавление ассоциаций

В процессе разработки концептуальной модели необходимо идентифицировать связи (ассоциации) между понятиями, удовлетворяющие информационным требованиям имеющихся в текущий момент процесса разработки прецедентов, а также выделить те из них, которые способствуют лучшему пониманию концептуальной модели. В данной главе сначала рассматривается процесс определения соответствующих ассоциаций, а затем полученные навыки применяются к добавлению ассоциаций в концептуальную модель системы розничной торговли.

Ассоциация (association) — это связь между понятиями, отражающая некоторое значимое и полезное отношение между ними

В языке UML ассоциации описываются как "структурные взаимосвязи между объектами различных типов".

Обычно в концептуальную модель включаются следующие ассоциации:

• Ассоциации, знания о которых нужно сохранять в течение некоторого периода (важные ассоциации)

• Ассоциации, производные от содержащихся в списке стандартных ассоциаций

Система обозначений для ассоциаций языка UML

Ассоциация обозначается проведенной между понятиями линией, с которой связано определенное имя. Обычно ассоциация является двунаправленной. Это означает, что от одного объекта любого типа возможен логический переход к другому объекту.

Такой переход является абсолютно абстрактным. Он не определяет тип взаимосвязей между программными сущностями.

На концах линии, которая обозначает ассоциацию, могут содержаться выражения, определяющие количественную связь между экземплярами понятий.

Дополнительная стрелка рядом с именем ассоциации указывает, в каком направлении нужно читать ее имя. Она не определяет направление видимости или перемещения. Если такая стрелка отсутствует, то имена ассоциаций следует читать с использованием общепринятых соглашений, а именно — слева направо и сверху вниз. Однако в языке UML в явной форме это правило отсутствует. Стрелка направления чтения не имеет семантического значения. Она лишь представляет способ чтения диаграмм.

Атрибуты

Атрибут (attribute) — это абстрактное свойство объекта.

В концептуальную модель включаются те атрибуты, для которых определены соответствующие требования (например, прецеденты) или для которых предполагается, что необходимо хранить определенную информацию.

Например, в товарном чеке обычно указываются дата и время. Следовательно, для понятия Sale (Продажа) требуются атрибуты date (дата) и time (время).

Система обозначений атрибутов в языке UML

Атрибуты помещаются во второй раздел условного обозначения понятия.
Дополнительно может быть указан также тип атрибута. Например, у понятия Sale атрибуты date, startTime, у второго атрибута может быть указан тип атрибута Time через двоеточие.