Билет 23.

1. Двумерные и трехмерные конечные элементы, их базисные и весовые функции.

Решение двумерной и трехмерной стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов

Трехмерное стационарное уравнение теплопроводности можно записать в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0$$

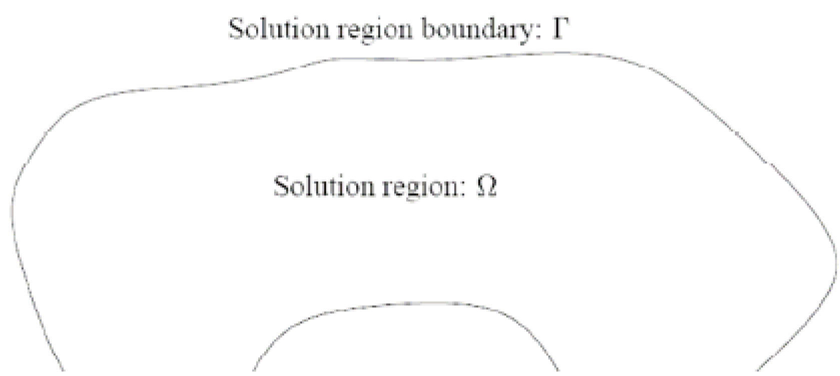
Здесь k_x, k_y, k_z – коэффициенты теплопроводности вдоль осей x, y, z. В случае постоянных коэффициентов теплопроводности уравнение записывается в виде

$$-\nabla\cdot(k\nabla u)-0$$

если же коэффициенты теплопроводности одинаковы по всем направлениям, то уравнение принимает вид:

$$k\nabla^2 u=0.$$

Мы должны решить уравнение в области Ω с границей Γ



Интегральное уравнение соответствующее этому уравнению можно записать следующим образом

$$\int\limits_{\Omega} -\nabla \cdot (k \nabla u)\, \omega \, d\Omega = 0$$

При помощи формулы Грина-Гаусса (аналог формулы интегрирования по частям):

$$\int\limits_{\Omega} \left(f \nabla \cdot \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g \right)\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n}\, d\Gamma$$

Уравнение можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} -\nabla \cdot (k \nabla u)\, \omega \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma$$

В отсутствие правой части (нет источников тепла) уравнение имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla \omega \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma$$

Выражение под знаком интеграла в левой части можно представить в виде

$$\nabla u \cdot \nabla \omega = \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$$

u и ω представляются в виде

$$u = \varphi_n u_n$$

$$\omega = \varphi_m.$$

Здесь предполагается суммирование по одинаковым индексам. Производные переменных «математического» пространства ($0<\xi<1$) по «физическим» переменным x и y определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\frac{\partial y}{\partial \xi_1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}$$

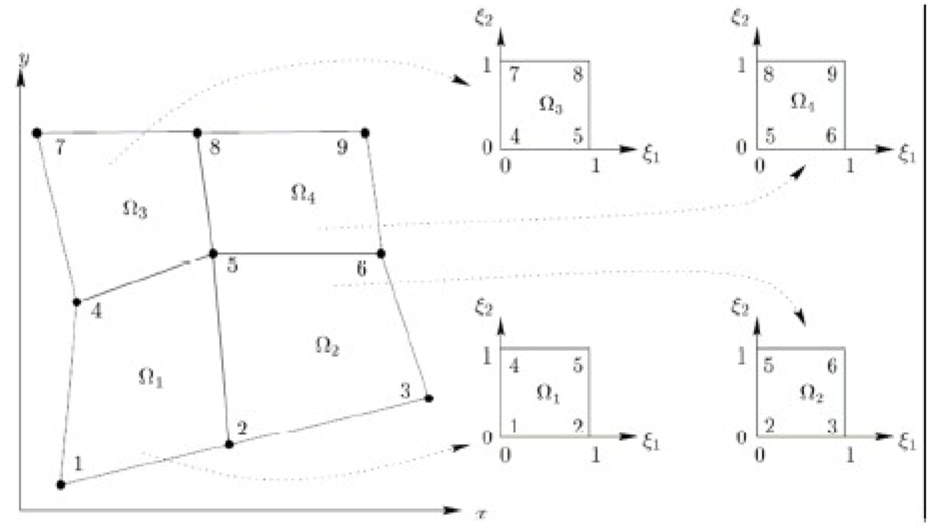
Представим область, в которой мы ищем решение, в виде совокупности элементов

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{I} \Omega_i.$$

В каждом элементе u можно представить в виде

$$u = \varphi_n u_n = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \ldots + \varphi_N u_N$$

отобразим каждый элемент на плоскость (ξ_1,ξ_2), как представлено на рисунке



Для каждого элемента базисные функции и их производные имеют вид

$$\varphi_1 = (1-\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} = -(1-\xi_2)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = -(1-\xi_1)$$

$$\varphi_2 = \xi_1(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} = 1-\xi_2$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} = -\xi_1$$

$$\varphi_3 = (1-\xi_1)\xi_2 \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} = -\xi_2$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} = 1-\xi_1$$

$$\varphi_4 = \xi_1 \xi_2 \qquad\qquad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} = \xi_2$$

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} = \xi_1$$

Интегральное уравнение в случае двумерной задачи имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma$$

Используя представление решения в виде разложения по базисным функциям и базисную функцию в качестве весовой функции, получим

$$\sum_i u_n \int\limits_{\Omega} k \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_m \, d\Gamma$$

или

$$E_{mn} u_n = F_m$$

E_{mn} – матрица жесткости, а F_m – вектор нагрузки, $m = 1,\ldots,4$ и $n = 1,\ldots,4$.

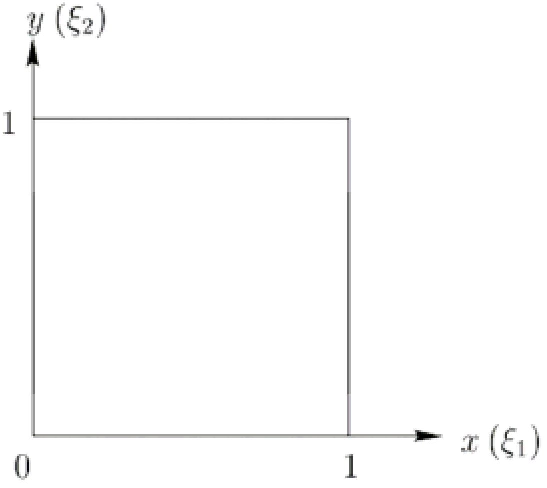
Рассмотрим распределение тепла в единичном квадрате (см. рисунок).

В этом случае элемент E_{11} имеет вид:

$$E_{11} = k \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2 \, dx dy$$

$$= \frac{2}{3} k$$

Аналогично вычисляются остальные элементы матрицы жесткости.



Заметим, что если элемент не является единичным квадратом, нам надо переходить от координат (x,y) к координатам (ξ_1,ξ_2), в этом случае надо в интеграл добавить якобиан перехода, т.е. использовать соотношение:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x}.$$

Для единичного квадрата матричное уравнение имеет вид:

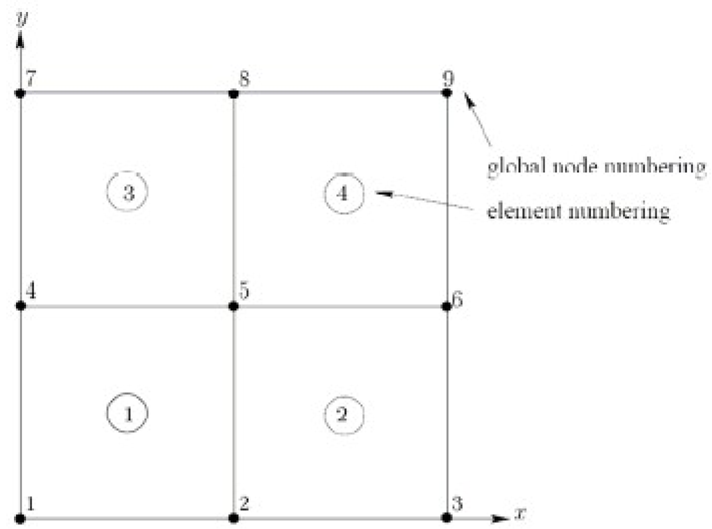
$$k\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = RHS \qquad \text{(Right Hand Side)}$$

Матрица жесткости симметрична.

Обычно область, для которой ищется решение, состоит не из одного квадратного элемента, поэтому на следующем шаге надо получить матрицу жесткости для всей области.

В качестве примера рассмотрим область, состоящую из четырех единичных квадратных элементов и девяти узлов. Получим следующую глобальную матрицу жесткости:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & & \\
-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & \\
 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & & \\
-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\
 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\
 & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \\
 & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\
 & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = RHS
$$



Выполнив необходимые арифметические действия, получим:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & & & \\
-\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & & \\
 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & & \\
-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\
 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\
 & & & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \\
 & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\
 & & & & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = RHS
$$

Далее надо наложить граничные условия и решать алгебраическую систему. Наложение граничных условий уменьшает количество неизвестных и уравнений. В нашем примере будем считать, что задана температура на левой и правой границах пластины, а через верхний и нижний края нет потока тепла. Учитывая, что температура в узлах, лежащих на вертикальных границах, известна, нам надо найти ее только в узлах 2, 5, 8. Правая часть в узлах 2 и 8 равна нулю, т.к. через них поток тепла равен нулю. Напомним, что правая часть имеет вид:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma$$

В узле 5 правая часть также равна нулю, т.к. это внутренний узел. Для получения решения надо решить три линейных уравнения.

2. Основы метода граничных элементов для трехмерных задач.

Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине:

$\omega_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2,} |x| < \frac{1}{n} \\ 0 |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию: $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx = 1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1,\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi),\delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\begin{Bmatrix}0 if \xi<t\\1 if \xi>t\end{Bmatrix}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η) . Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η) , поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int_D\nabla^2\omega dD=-\int_D\delta dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int_D\nabla^2\omega dD=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi},\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. B принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int_\Omega\nabla^2 u\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_\Omega\nabla u\nabla\omega d\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части

$0=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega d\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega d\Omega=-\int_{\Omega}u\delta(\xi-x,\eta-y)d\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$