Билет №24. Вопрос 1. Треугольные конечные элементы

Это треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами, по одной в каждой вершине. Необходима логическая нумерация узлов – против часовой стрелки, начиная от некоторого i-ого узла, выбираемого произвольно. Интерполяционный полином имеет вид: $\phi=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y$. В узлах выполняются сл. усл. : $\phi=\Phi_i$ при $x=x_i$, $y=y_i$; $\phi=\Phi_j$ при $x=x_j$, $y=y_j$; $\phi=\Phi_k$ при $x=x_k$, $y=y_k$. Подставляем эти условия в полином и получаем :

$$\alpha_1=1/2\text{A}[(X_i Y_k-X_k Y_j)\Phi_i+(X_k Y_i-X_i Y_k)\Phi_j+(X_i Y_j-X_j Y_i)\Phi_k]$$
$$\alpha_2=1/2\text{A}[(Y_j-Y_k)\Phi_i+(Y_k-Y_i)\Phi_j+(Y_i-Y_j)\Phi_k]$$
$$\alpha_3=1/2\text{A}[(X_k-X_j)\Phi_i+(X_i-X_k)\Phi_j+(X_j-X_i)\Phi_k]$$

Определитель системы связан с площадью треугольника соотношением:

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix}=2\text{A}$$

Соотношение, определяющее элемент, содержит три ф-ции формы, по одной для каждого узла: $\phi=N_i\Phi_i+N_j\Phi_j+N_k\Phi_k$, где

$$N_i=1/2\text{A}[a_i+b_i x+c_i y], a_i=X_j Y_k-X_k Y_j, b_i=Y_j-Y_k, c_i=X_k-X_j$$
$$N_j=1/2\text{A}[a_j+b_j x+c_j y], a_j=X_k Y_i-X_i Y_k, b_j=Y_k-Y_i, c_j=X_i-X_k$$
$$N_k=1/2\text{A}[a_k+b_k x+c_k y], a_k=X_i Y_j-X_j Y_i, b_k=Y_i-Y_j, c_k=X_j-X_i$$

Скалярная величина ϕ определяется внутри элемента функциями формы, линейными по x и y. Это означает, что градиенты этой величины в направлениях x и y будут постоянны. Градиент в направлении x определяется соотношением

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\Phi_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}\Phi_j+\frac{\partial N_k}{\partial x}\Phi_k$$
$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x}=b_\beta, \beta=i,j,k$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=b_i\phi_i+b_j\phi_j+b_k\phi_k$$

Так как b_i, b_j, b_k постоянны (они фиксированы как только заданы узловые координаты) и ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k не зависят от координат пространства, частная производная имеет постоянное значение. Постоянство градиента внутри каждого элемента означает, что необходимо использовать очень малые по величине элементы, чтобы аппроксимировать быстро меняющуюся ф-цию ϕ .

L-координаты. Для треугольного элемента наиболее распространенной является естественная система координат, определяемая тремя относительными координатами $L_{1,} L_{2,} L_3$ Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон s к высоте h, опущенной на эту сторону из противолежащей вершины. Ясно, что величина L_i изменяется в пределах от нуля до единицы. $L-1+L_2+L_3=1$. Координатные переменные $L_{1,} L_{2,} L_3$ представляют собой функции формы для треугольного элемента: $N_i=L_{1,} N_j=L_{2,} N_k=L_3$.

Преимуществом использования L-координат является существование интегральных формул, которые упрощают вычисление интегралов вдоль сторон элемента и по его площади:

$$\int_\Gamma L_1^a L_2^b d\Gamma=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}\Gamma$$
$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA=\frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2\text{A}$$

величина Γ представляет собой расстояние между двумя узлами рассматриваемого элемента.

Билет 24. Вопрос 2. Процедура численного решения интегрального уравнения для метода граничных элементов. Прежде, чем познакомиться с методом граничных элементов, надо определить фундаментальное решение. Фундаментальное решение тесно связано с дельта-функцией Дирака. Рассмотрим последовательность распределений силы, приложенной к большой пластине: $\omega_n(x)=\begin{Bmatrix} \frac{n}{2}, |x|<\frac{1}{n} \\ 0 |x|>\frac{1}{n} \end{Bmatrix}$ Каждое такое распределение удовлетворяет условию: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_n dx=1$ Суммарная сила, приложенная к пластине равна 1. При увеличении n область, в которой сила отлична от нуля, уменьшается. Нестрого дельта-функцию можно определить следующим образом: $\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\omega_n(x)$ Свойства дельта-функции: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx=1, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)h(x)dx=h(0)$ Кроме приведённых выше, дельта-функция ещё обладает следующими свойствами: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi-x)h(x)dx=h(\xi), \delta(\xi-x)=H'(\xi-t)$ Дельта-функция – производная функции Хэвисайда: $H(\xi-t)=\begin{Bmatrix} 0\, if\, \xi<t \\ 1\, if\, \xi>t \end{Bmatrix}$ Двумерная дельта-функция вводится следующим образом $\delta(\xi-x,\eta-y)=\delta(\xi-x)\delta(\eta-y)$ **Фундаментальное решение.** Построим фундаментальное решение для двумерного уравнения Лапласа. Это решение называется также функция Грина. Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в области $\Omega\in\mathbb{R}^2$. Фундаментальным решением этого уравнения называется решение уравнения вида $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}+\delta(\xi-x,\eta-y)=0$. Надо найти решение уравнения Лапласа в двумерной области, имеющее сингулярность в точке (ξ,η) . Это решение должно быть симметрично относительно точки (ξ,η) , поэтому мы введем полярную систему координат с центром в точке сингулярности, тогда $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Оператор Лапласа запишется в виде $\nabla^2\omega=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\Theta^2}$ Для $r>0$ $\delta(\xi-x,\eta-y)=0$ учитывая симметрию задачи, уравнение можно записать в виде $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\omega}{\partial r})=0$. Это уравнение можно решить при помощи обычного интегрирования, решение будет иметь вид $\omega=A\log r+B$. Эта функция сингулярна в точке r=0. Для нахождения A и B воспользуемся свойствами дельта-функции: $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=-\int\limits_D \delta dD=-1$. Здесь D -любая область, содержащая точку r=0. Для оценки интересующих нас интегралов мы рассмотрим простую область – круг с центром в точке r=0 и радиусом $\varepsilon>0$. При помощи теоремы Грина-Гаусса оценим интеграл $\int\limits_D \nabla^2\omega dD=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial n}dS=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\omega}{\partial r}dS=\frac{A}{\varepsilon}2\pi\varepsilon=2\pi A$. Мы преобразовали интеграл по площади в интеграл по границе, т.к. область D – круг, то нормаль n направлена по радиусу. Отсюда получаем: $A=-\frac{1}{2\pi}, \omega=-\frac{1}{2\pi}\log r+B$. В принимает произвольные значения, но обычно полагается равным нулю, таким образом, фундаментальное решение для уравнения Лапласа для двумерной области имеет вид $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ причём $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Аналогичным образом находится фундаментальное решение для трехмерного уравнения Лапласа, оно имеет вид: $\omega=\frac{1}{4\pi r}$. **Метод граничных элементов для двумерной задачи.** Рассмотрим применение метода граничных элементов для решения уравнения Лапласа в двумерной области. Сначала, также как в методе конечных элементов, запишем интегральное уравнение и применим теорему Грина-Гаусса: $0=\int_{\Omega}\nabla^2 u\,\omega\,d\,\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega\,d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega\,d\,\Omega$. Затем применим теорему Грина-Гаусса ещё раз ко второму интегралу в правой части $0=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\Omega}\nabla u\nabla\omega\,d\,\Omega=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma+\int_{\Omega}u\nabla^2\omega\,d\,\Omega$. В методе конечных элементов в качестве весовой функции выбиралась одна из базисных функций, которые использовались для аппроксимации решения. В методе граничных элементов в качестве весовой функции используется фундаментальное решение уравнения Лапласа, полученное выше $\omega=-\frac{1}{2\pi}\log r=\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$ $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Используя свойства дельта-функции, получим: $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega\,d\,\Omega=-\int_{\Omega}u\,\delta(\xi-x,\eta-y)\,d\,\Omega=-u(\xi,\eta),(\xi,\eta)\in\Omega$. Здесь вместо интеграла по области получили значение функции в точке, и уравнение принимает вид $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega\,d\,\Omega=-\int_{\Omega}u\,\delta(\xi-x,\eta-y)\,d\,\Omega=0$. Таким образом, интегральное уравнение записывается в виде $u(\xi,\eta)+\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\omega}{\partial n}d\Gamma=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\omega d\Gamma,(\xi,\eta)\in\Omega$. Это уравнение содержит только интегралы по границе. Если точка (ξ,η) находится вне Ω , то $\int_{\Omega}u\nabla^2\omega\,d\,\Omega=-\int_{\Omega}u\,\delta(\xi-x,\eta-y)\,d\,\Omega=0$ Если точка (ξ,η) лежит на границе области, то первый член предыдущего уравнения заменяется выражением $\frac{1}{2}u(\xi,\eta)$