Билет 7.

1. Метод релаксации. Методы Якоби и Гаусса-Зейделя.

Методы релаксации для решения граничных задач.

Как упоминалось выше, методы релаксации разбивают разреженную матрицу на несколько, а затем задача решается при помощи итераций. Можно объяснить метод релаксации с физической точки зрения. Предположим нам надо решить эллиптическое уравнение:

$$Lu=\rho \tag{4.1}$$

Здесь L – эллиптический оператор, а ρ - правая часть уравнения, тогда перепишем уравнение как уравнение диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu-\rho \tag{4.2}$$

Начальное распределение u релаксирует к равновесному решению при T стремящемся к бесконечности. Уравнение диффузии для нашей задачи можно записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\rho \tag{4.3}$$

Если мы используем разностную схему FTCS, то получим:

$$u_{j,l}^{n+1}=u_{j,l}^{n}+\frac{\Delta t}{\Delta^2}(u_{j+1,l}^{n}+u_{j-1,l}^{n}+u_{j,l+1}^{n}+u_{j,l-1}^{n}-4u_{j,l}^{n})-\rho_{j,l}\Delta t \tag{4.4}$$

Эта схема устойчива, если $\Delta t/(\Delta*\Delta)\le 1/2$, в двумерном случае $\Delta t/(\Delta*\Delta)\le 1/4$, возьмем максимально возможный шаг, при котором $\Delta t/(\Delta*\Delta)=1/4$, тогда уравнение (4.4) примет вид:

$$u_{j,l}^{n+1}=\frac{1}{4}(u_{j+1,l}^{n}+u_{j-1,l}^{n}+u_{j,l+1}^{n}+u_{j,l-1}^{n})-\frac{\Delta^2}{4}\rho_{j,l} \tag{4.5}$$

Эта классическая разностная схема была предложена в конце прошлого века и называется методом Якоби. Этот метод редко используется на практике из-за медленной сходимости, однако он служит основой для понимания многих современных методов.

Второй классический метод называется методом Гаусса-Зейделя; этот метод используется в многосеточных методах решения граничных задач. В этом методе два значения неизвестной функции в правой части (4.5) берутся в момент времени n+1, как только они становятся известны.

$$u_{j,l}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j+1,l}^{n} + u_{j-1,l}^{n+1} + u_{j,l+1}^{n} + u_{j,l-1}^{n+1}) - \frac{\Delta^2}{4}\rho_{j,l}$$
(4.6)

Этот метод также медленно сходится, однако анализ этого метода может быть полезен.

Рассмотрим методы Якоби и Гаусса-Зейделя с точки зрения представления матриц в виде суммы. Заменим обозначение u на x, чтобы получить стандартный вид матричного уравнения.

$$\mathrm{A} \cdot x = b$$
(4.7)

Мы можем представить матрицу A в виде

$$\mathrm{A} = L + D + U$$
(4.8)

Здесь –D –диагональная часть матрицы A, L – нижняя треугольная часть матрицы A, U – верхняя треугольная часть матрицы A, матрицы L, U содержат нули на диагонали. При использовании метода Якоби итерацию на r –м шаге можно записать в виде:

$$D \cdot x^{(r)} = -(L+U) \cdot x^{(r-1)} + b$$
(4.9)

Матрица $-D^{-1}*(L+U)$ – итерационная матрица при помощи которой находится следующее итерационное приближение. Была произведена для этого метода оценка числа итераций, необходимых для достижения точности 10^{-p}

$$r \approx \frac{p \ln 10}{(-\ln p_s)}$$
(4.10)

При увеличении размерности сетки J спектральный радиус p_s стремится к единице. Для данного конкретного уравнения, граничных условий и геометрии сетки спектральный радиус, в принципе, можно вычислить аналитически, так для сетки размерности J*J с условиями Дирихле на всех четырех границах, асимптотическая формула для больших J имеет вид:

$$p_s \cong 1 - \frac{\pi^2}{2J^2}$$
(4.11)

При этом необходимое число итераций можно оценить по формуле:

$$r \cong \frac{2pJ^2 \ln 10}{\pi^2} \cong \frac{1}{2} pJ^2$$
(4.12)

Другими словами, число итераций пропорционально числу точек сетки.

Методу Гаусса-Зейделя соответствует следующее матричное уравнение:

$$(L+D)\cdot x^{(r)}=-U\cdot x^{(r-1)}+b$$

(4.13)

Для рассматриваемой нами модели спектральный радиус и число итераций можно оценить по формулам:

$$p_s\cong 1-\frac{\pi^2}{J^2}$$

(4.14)

(4.15)

$$r\cong\frac{pJ^2\ln 10}{\pi^2}\cong\frac{1}{4}pJ^2$$

Метод SOR

Мы получим лучший алгоритм – один из самых распространенных до семидесятых годов прошлого века - если мы скорректируем величину $\mathbf{x}^{(r)}$ на r-м шаге итераций Гаусса-Зейделя. Из метода Гаусса-Зейделя следует:

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-(L+D)^{-1}\cdot[(L+D+U)\cdot x^{(r-1)}-b]$$

(4.16)

Член в квадратных скобках –вектор невязки $\xi^{(r-1)}$ т.е.

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-(L+D)^{-1}\cdot\xi^{(r-1)}$$

(4.17)

Для улучшения сходимости введем так называемый параметр «сверхрелаксации» ω:

$$x^{(r)}=x^{(r-1)}-\omega(L+D)^{-1}\cdot\xi^{(r-1)}$$

(4.18)

Метод, использующий эту схему, назвали методом SOR (successive overrelaxation).

Можно доказать следующие теоремы:

Метод сходится только для $0 < \omega < 2$, если $0 < \omega < 1$, то говорят о недостаточно быстрой релаксации

При определенных математических ограничениях, которым удовлетворяют матрицы, получающиеся в методах конечных разностей только при $1 < \omega < 2$ этот метод сходится быстрее метода Гаусса-Зейделя.

Если ρ_{Jacobi} спектральный радиус итерационной схемы Якоби, квадрат его – спектральный радиус метода Гаусса-Зейделя), то оптимальное значение ω имеет вид:

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho_{Jacobi}^2}}$$

(4.19)

Спектральный радиус при этом равен

$$\rho_{SOR}=\left(\frac{\rho_{Jacobi}}{1+\sqrt{1-\rho_{Jacobi}^2}}\right)^2$$

(4.20)

Если использовать выражение для радиуса Якоби из формулы (4.11), то получим:

$$\omega \cong \frac{2}{1+\pi/J}$$

(4.21)
(4.22)

$$\rho_{SOR} \cong 1-\frac{2\pi}{J}$$

Для достижения точности 10^{-p} необходимо следующее число итераций:

$$r \cong \frac{pJ\ln 10}{2\pi} \cong \frac{1}{3}pJ$$

(4.23)

Отсюда следует, что метод SOR для достижения точности 10^{-p} требует количества итераций, пропорционального J, а не J^2 .

При помощи этого численного метода можно с успехом решать граничные задачи для уравнений в частных производных.

2. Описание системных операций.

Системные события и операции. Системное событие (system event) — это внешнее входное событие, сгенерированное для системы исполнителем. Событие инициирует выполнение определенной операции. Системная операция (system operation) является операцией, которую система выполняет в ответ на сгенерированное событие. Например, если кассир генерирует системное событие enterltem, то это приводит к выполнению системной операции enterltem. Имена, события и операции идентичны. Различие между ними заключается в том, что событие является именованным стимулирующим воздействием, а операция представляет собой реакцию на это воздействие.

Запись системных операций.

Набор всех требуемых системных операций определяется путем идентификации системных событий. Вместе с параметрами они имеют следующий вид:

• enterItem(UPC, quantity)
• endSale()
• makepayment(amount)

Где же эти операции должны быть записаны? В языке UML операции записываются как тип.

В соответствии с приведенной системой обозначений операции могут быть сгруппированы как операции типа с именем System. При этом параметры можно не указывать.

Такую схему можно без проблем использовать для записи системных операций нескольких систем или процессов распределенного приложения. В этом случае каждой системе ставится в соответствие уникальное имя (System1, System2, ...) и назначаются собственные системные операции.

Представление типа System существенно отличается от объектов, помещаемых в концептуальную модель. Ее элементы иллюстрируют понятия реального мира, а тип System представляет собой искусственно созданную конструкцию.