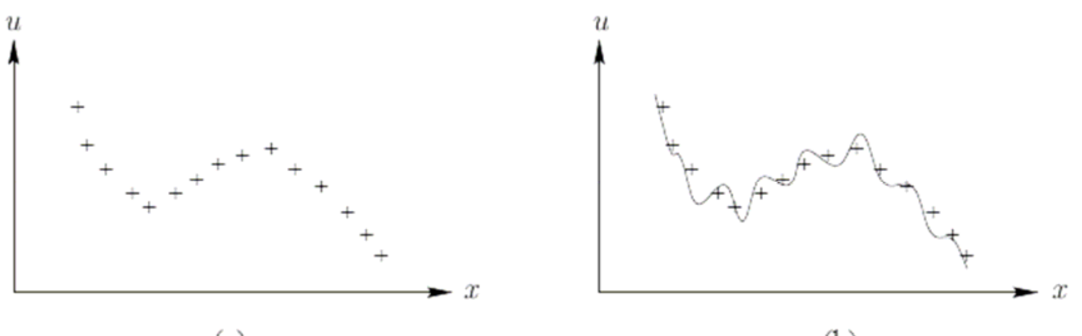
Метод конечных элементов

Базисные функции конечных элементов

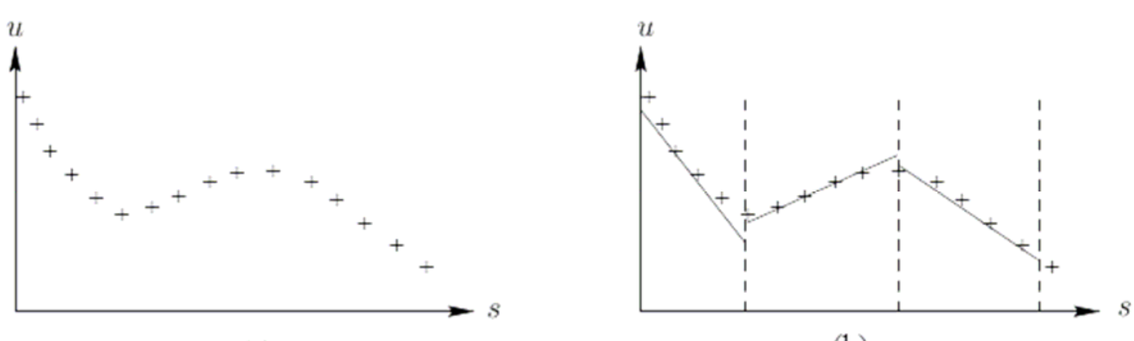
Описание одномерного температурного поля

Пусть имеется полученное экспериментально одномерное распределение температуры вдоль балки (x – координата точки, в которой измерена температура) (рисунок (a)) и мы хотим найти математическую функцию, описывающую это распределение.



(a) (b)

Можно попытаться описать эту зависимость при помощи полинома и найти коэффициенты полинома при помощи метода наименьших квадратов. Полином высокой степени достаточно точно описывает набор экспериментальных данных, но при этом возникают нежелательные осцилляции (см. рис. (b)), полином же низкой степени, плохо описывает кривую. Попробуем решить задачу, разбив балку на области (элементы) и попробуем описать каждую область при помощи полинома невысокой степени. Введем параметр s, который характеризует расстояние от точки до края балки, и при помощи метода наименьших квадратов найдем для каждого элемента (области) линейный полином, описывающий каждую область наилучшим образом.



(a) (b)

Линейные базисные функции

Как видно из рисунка, линейные полиномы хорошо описывают температурное поле в каждой области, но получившаяся аппроксимация не является непрерывной, на границах областей решения надо «сшивать». Это можно сделать следующим образом. Пусть u1 и u2 – значения температуры u в узлах, тогда линейную функцию между этими двумя узлами можно записать в виде

$$u(\xi) = (1-\xi)\,u_1 + \xi u_2$$

где $\xi(0 \le \xi \le 1)$ - нормированное расстояние вдоль кривой
Введем обозначения

$$\varphi_1(\xi) = 1-\xi$$
$$\varphi_2(\xi) = \xi$$

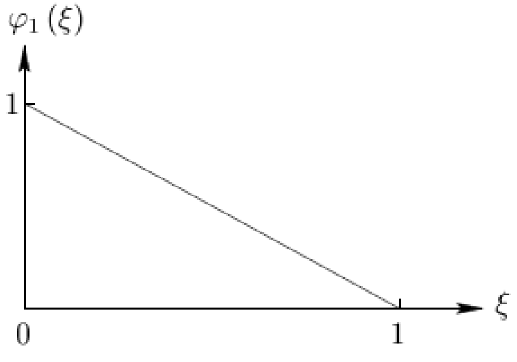
тогда

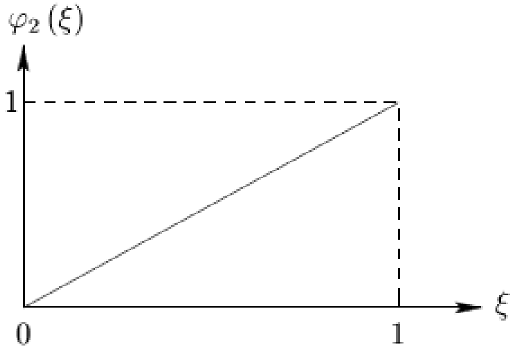
$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)\,u_1 + \varphi_2(\xi)\,u_2$$

Удобно всегда связывать значение температуры в узле u_n с узлом элемента n и связывать значение температуры U_Δ в глобальном узле Δ с локальным узлом n элемента e при помощи матрицы связи $\Delta(n,e)$, т.е.

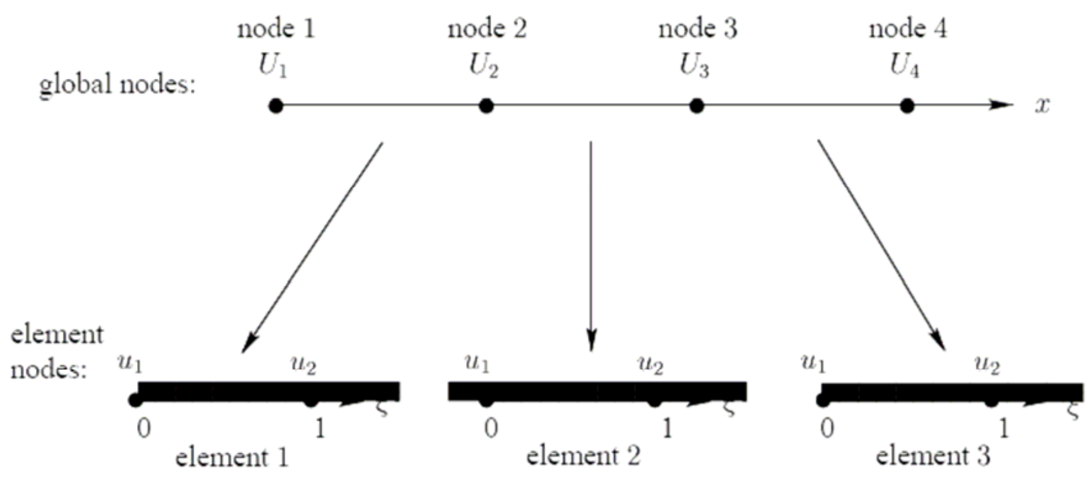
$$u_n = U_{\Delta(n,e)}$$

Линейные базисные функции имеют вид





Ниже приведена связь между глобальными узлами и узлами элемента



Первый элемент интерполируется выражением

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)\, u_1 + \varphi_2(\xi)\, u_2$$

$u_1 = U_1$ $\quad u_2 = U_2$.

второй – выражением

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)\, u_1 + \varphi_2(\xi)\, u_2$$

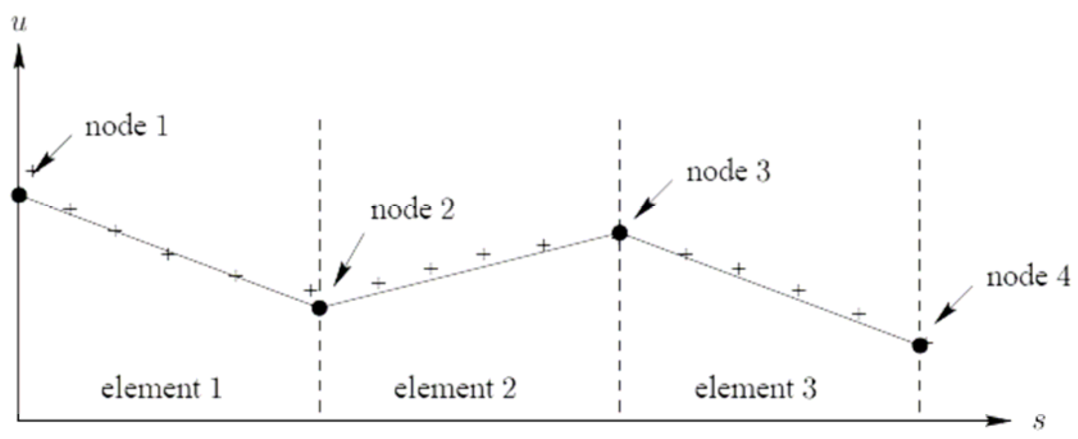
$u_1 = U_2$ $\quad u_2 = U_3$

третий – выражением

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)\, u_1 + \varphi_2(\xi)\, u_2$$

$u_1 = U_3 \quad u_2 = U_4$

Мы получили непрерывное температурное поле, описанное значениями температуры в узлах и линейными базисными функциями



Базисные функции можно рассматривать как весовые функции для значений в узлах. Так для элемента 1

При

$$\xi = 0 \qquad u\left(0\right) = \left(1 - 0\right) u_1 + 0 u_2 = u_1$$

совсем не зависит от u_2, при

$$\xi = \frac{1}{4} \qquad u\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) u_1 + \frac{1}{4} u_2 = \frac{3}{4} u_1 + \frac{1}{4} u_2$$

при

$$\xi = \frac{1}{2} \qquad u\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) u_1 + \frac{1}{2} u_2 = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$$

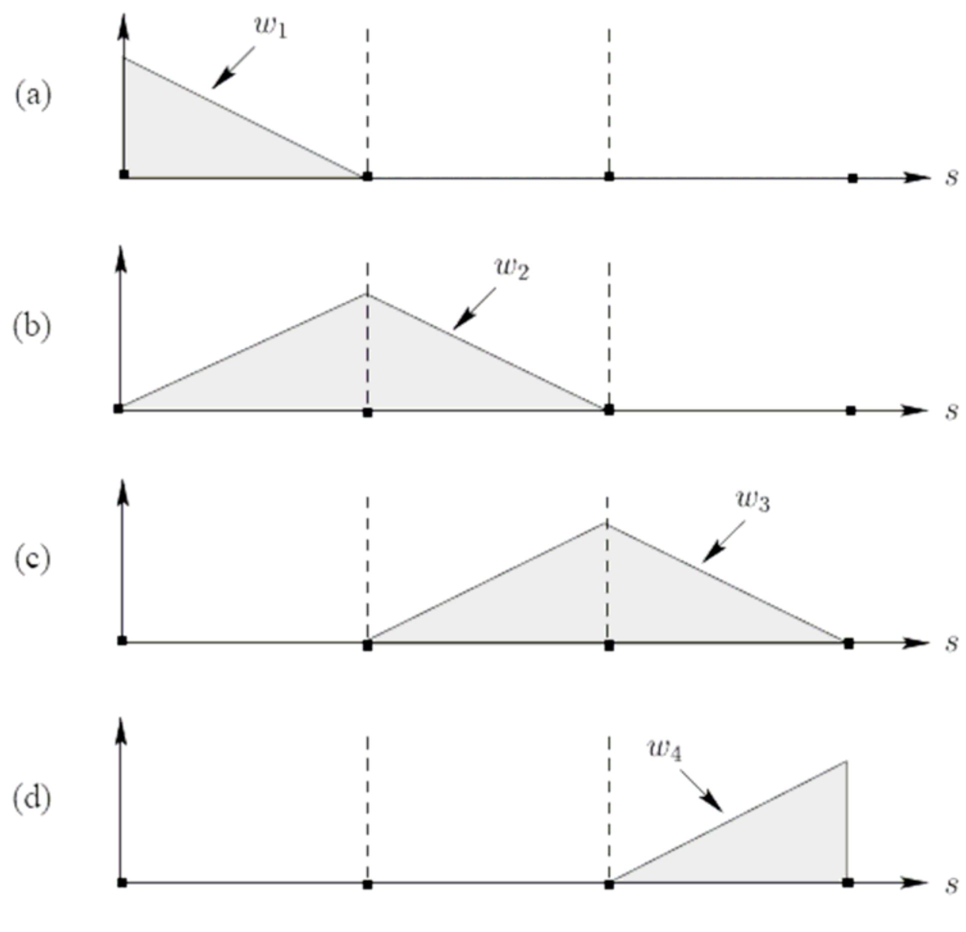
при

$$\xi = \frac{3}{4} \qquad u\left(\frac{3}{4}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) u_1 + \frac{3}{4} u_2 = \frac{1}{4} u_1 + \frac{3}{4} u_2$$

при

$$\xi = 1 \qquad u\left(1\right) = \left(1 - 1\right) u_1 + 1 u_2 = u_2$$

Эти весовые функции можно рассматривать как глобальные и весовая функция w_n, связанная с глобальным узлом n строится из базисных функций элементов соседних узлов



Таким образом, мы получили непрерывную параметрическую зависимость температуры u от ξ, но чтобы получить u(x), мы должны связать x и ξ. Можно написать интерполяционную формулу для определения x по значениям в узлах, так, например, для элемента 1 получим

$$x(\xi) = \varphi_1(\xi)\, x_1 + \varphi_2(\xi)\, x_2$$

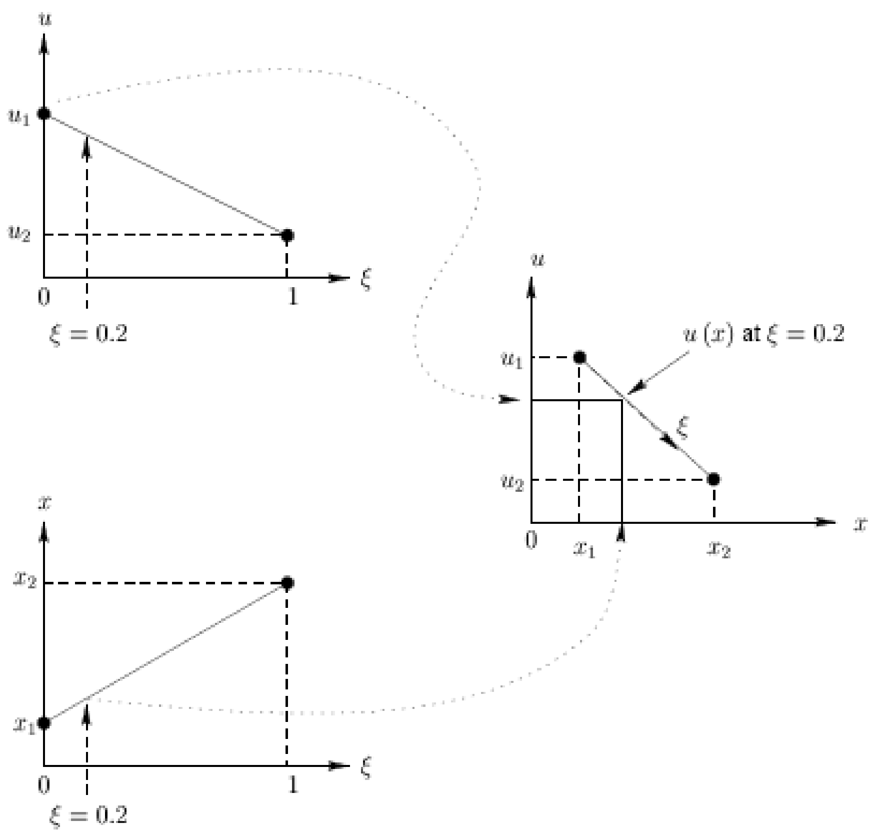
и аналогично для двух других элементов. Зависимость температуры от x можно определить при помощи двух соотношений

$$u(\xi) = \sum_n \varphi_n(\xi)\, u_n$$

$$x(\xi) = \sum_n \varphi_n(\xi)\, x_n$$

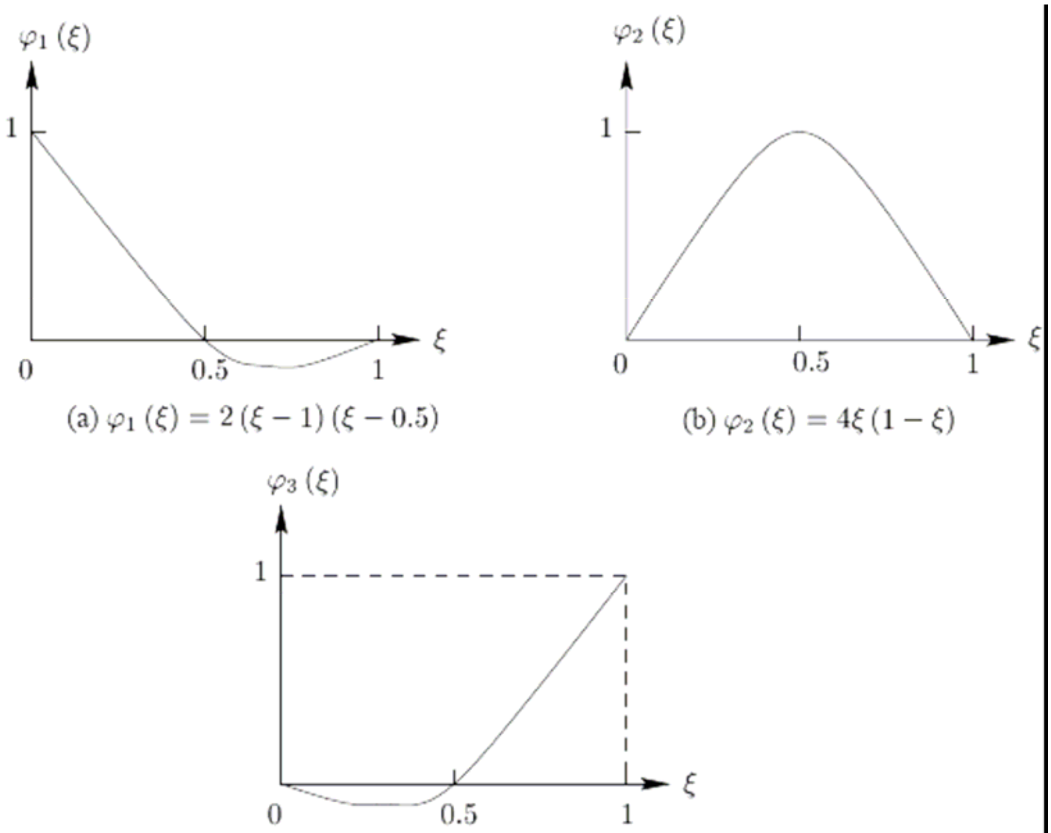
Суммирование проводится по всем узлам элемента

Связь между x и u через ξ, показана ниже



Квадратичные базисные функции

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)\, u_1 + \varphi_2(\xi)\, u_2 + \varphi_3(\xi)\, u_3$$



(a) $\varphi_1(\xi) = 2(\xi - 1)(\xi - 0.5)$

(b) $\varphi_2(\xi) = 4\xi(1 - \xi)$

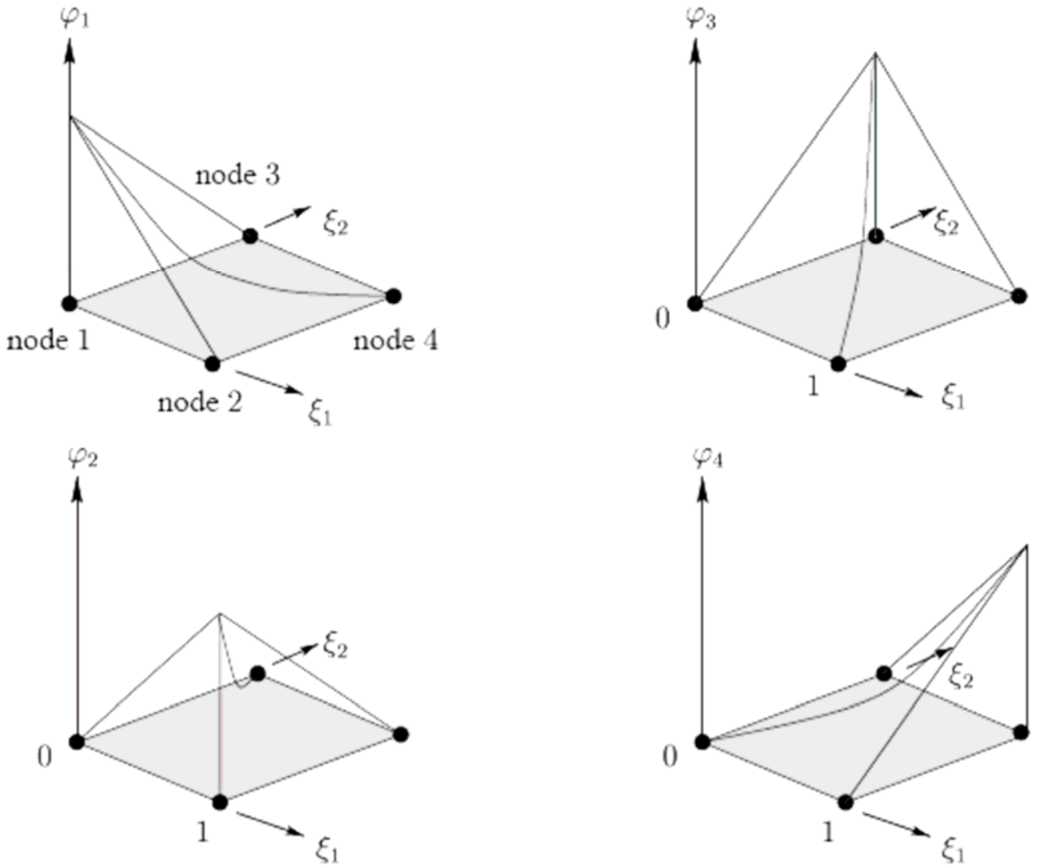
(c) $\varphi_3(\xi) = 2\xi(\xi - 0.5)$

Двумерные и трехмерные конечные элементы

Двумерные билинейные базисные функции строятся как произведение одномерных функций.

$$u(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)\, u_1 + \varphi_2(\xi_1, \xi_2)\, u_2 + \varphi_3(\xi_1, \xi_2)\, u_3 + \varphi_4(\xi_1, \xi_2)\, u_4$$

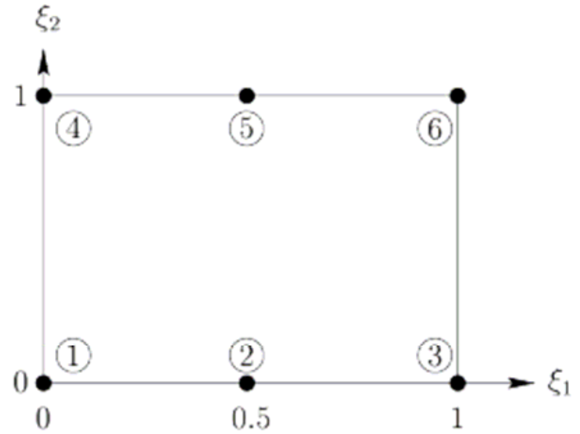
$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$
$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)$$
$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)\,\xi_2$$
$$\varphi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2$$



Например, для шаблона, состоящего из 6 узлов и для квадратично линейного элемента, получим

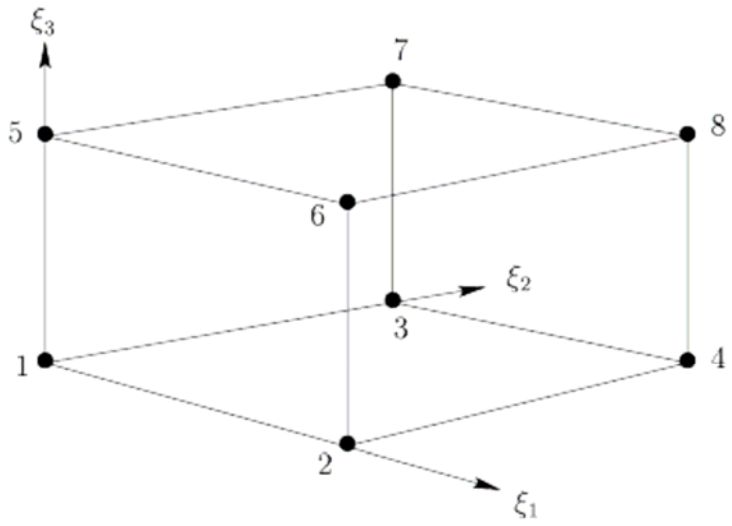
$$u = \sum_{n=1}^{6} \varphi_n \left(\xi_1, \xi_2\right) u_n$$

$$\varphi_1(\xi_1,\xi_2) = 2(\xi_1-1)(\xi_1-0.5)(1-\xi_2) \qquad \varphi_2(\xi_1,\xi_2) = 4\xi_1(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$
$$\varphi_3(\xi_1,\xi_2) = 2\xi_1(\xi_1-0.5)(1-\xi_2) \qquad \varphi_4(\xi_1,\xi_2) = 2(\xi_1-1)(\xi_1-0.5)\xi_2$$
$$\varphi_5(\xi_1,\xi_2) = 4\xi_1(1-\xi_1)\xi_2 \qquad \varphi_6(\xi_1,\xi_2) = 2\xi_1(\xi_1-0.5)\xi_2$$



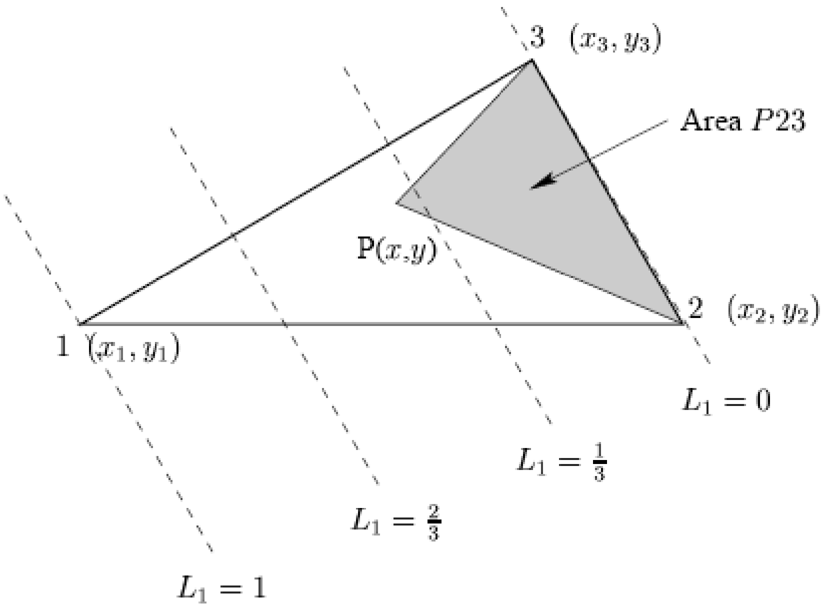
Для 8-узельного линейного элемента получим

$$\varphi_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) \qquad \varphi_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3)$$
$$\varphi_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_3) \qquad \varphi_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1\xi_2(1-\xi_3)$$
$$\varphi_5(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 \qquad \varphi_6(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1(1-\xi_2)\xi_3$$
$$\varphi_7(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (1-\xi_1)\xi_2\xi_3 \qquad \varphi_8(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \xi_1\xi_2\xi_3$$



Треугольные элементы

Для треугольных элементов используют соотношения между площадями.



$$L_1 = \frac{\text{Area} < P23 >}{\text{Area} < 123 >} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} / \Delta = (a_1 + b_1 x + c_1 y) \,/\, (2\Delta)$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$L_2 = \frac{\text{Area} < P13 >}{\text{Area} < 123 >} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} / \Delta = (a_2 + b_2 x + c_2 y) \,/\, (2\Delta)$$

$$L_3 = \frac{\text{Area} < P12 >}{\text{Area} < 123 >} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} / \Delta = (a_3 + b_3 x + c_3 y) \,/\, (2\Delta)$$

$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ $b_1 = y_2 - y_3$ $c_1 = x_3 - x_2$

$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, b_2 = y_3 - y_1, c_2 = x_1 - x_3$
$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, b_3 = y_1 - y_2, c_3 = x_2 - x_1.$

$L_1 + L_2 + L_3 = 1.$

$$u(x,y) = \varphi_1(x,y)\,u_1 + \varphi_2(x,y)\,u_2 + \varphi_3(x,y)\,u_3$$

$\varphi_1 = L_1, \varphi_2 = L_2$

$\varphi_3 = L_3 = 1 - L_1 - L_2.$

Для шестиузельного квадратичного элемента

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= L_1(2L_1 - 1)\\
\varphi_2 &= L_2(2L_2 - 1)\\
\varphi_3 &= L_3(2L_3 - 1)\\
\varphi_4 &= 4L_1L_2\\
\varphi_5 &= 4L_2L_3\\
\varphi_6 &= 4L_3L_1
\end{aligned}$$