ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»
ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Руководитель работы
Белова И. М.

Курсовая работа по дисциплине «Компьютерное моделирование»

Решение стационарного уравнения теплопроводности методом конечных элементов

Алексеев С.А.
гр. 6311

Москва 2007

Содержание

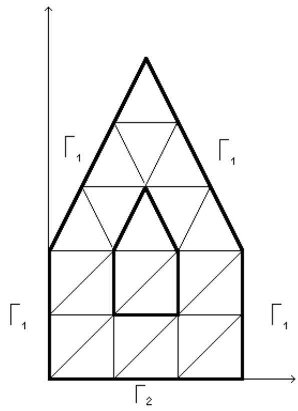

Рис. 1. *Исследуемая область*

1. Постановка задачи

В курсовой работе решается задача нахождения распределения тепла в области, изображенной на рис. 1.

Дифференциальное уравнение для нашей задачи имеет вид:

$$k\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)U=0 \qquad (1)$$

С граничными условиями:

$$U|_{\Gamma_1}=T \quad (2), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial \overline{n}}\right|_{\Gamma_2}=0 \quad (3)$$

Объединение Γ_1 и Γ_2 образует полную границу. Коэффициент k на внешней пластине равен K_1, на внутренней — K_2.

2. Метод конечных элементов

Граничные условия можно записать в виде:

$$k\left(\frac{\partial}{\partial x}l_x+\frac{\partial}{\partial y}l_y\right)U+h(U-U_\infty)=0 \qquad (4)$$

Величины l_x и l_y — направляющие косинусы вектора нормали к поверхности, h — коэффициент теплообмена, $U_\infty=T$ — температура окружающей среды.

С вариационной точки зрения решение уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3), записанными в виде (4), эквивалентно отысканию минимума функционала:

$$\chi = \int\limits_V \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U \, dV + \int\limits_S \frac{1}{2} h (U - U_\infty)^2 \, dS \qquad (5)$$

Минимизация функционала осуществляется на множестве узловых значений $\{U\}$. Будем минимизировать функционал до вычисления интегралов.

Начнём процесс минимизации с преобразования функционала. Перепишем соотношение (5) в виде:

$$\chi = \int\limits_V \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} \, dV + \int\limits_S \frac{h}{2} (U^2 - 2UU_\infty + U_\infty^2) \, dS \qquad (6)$$

$\{g\}$ — матрица частных производных, $[D]$ — единичная матрица, умноженная на k.

Вместо функции U введём в рассмотрение функции $U^{(e)}$, определённые на отдельных элементах. Тогда интегралы в (6) должны быть разбиты на интегралы по отдельным элементам:

$$\chi = \sum_{e=1}^{E} \int\limits_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \{g^{(e)}\}^T [D^{(e)}] \{g^{(e)}\} \, dV + \int\limits_{S^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2} (U^2 - 2UU_\infty^{(e)} + (U_\infty^{(e)})^2) \, dS \qquad (7)$$

где E — общее число элементов.

Последнее соотношение может быть символически записано как:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + ...\chi^{(E)} = \sum_{e=1}^{E} \chi^{(e)} \qquad (8)$$

Минимизация χ требует выполнения соотношений:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{U\}} = \frac{\partial}{\partial \{U\}} \sum_{e=1}^{E} \chi^e = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \chi^e}{\partial \{U\}} = 0 \qquad (9)$$

Частные производные $\frac{\partial \chi^e}{\partial \{U\}}$ не могут быть определены, пока интегралы в (7) не будут выражены через узловые значения $\{U\}$. Учитывая соотношение $U^{(e)} = [N^{(e)}]\{U\}$, можно вычислить $\{g\}$:

$$\{g^{(e)}\} = [B^{(e)}] U \qquad (10)$$

где $[B]$ содержит информацию, связанную с производными от функций формы. Таким образом получаем

$$\chi^{(e)} = \int\limits_{V^{(e)}} \tfrac{1}{2}\{U\}^T[B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\{U\}\,dV + \\ + \int\limits_{S^{(e)}} \tfrac{h}{2}\{U\}^T[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{U\}\,dS - \\ - \int\limits_{S^{(e)}} hU_\infty[N^{(e)}]\{U\}\,dS + \int\limits_{S^{(e)}} \tfrac{h}{2}(U_\infty^{(e)})^2)\,dS \qquad (11)$$

Дифференцируем величины (11) по $\{U\}$:

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\int\limits_{V^{(e)}} \frac{1}{2}\{U\}^T[B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\{U\}\,dV = \int\limits_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\{U\}\,dV$$

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\int\limits_{S^{(e)}} \frac{h}{2}\{U\}^T[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{U\}\,dS = \int\limits_{S^{(e)}} h[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{U\}\,dS$$

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\int\limits_{S^{(e)}} hU_\infty[N^{(e)}]\{U\}\,dS = \int\limits_{S^{(e)}} hU_\infty[N^{(e)}]^T\,dS$$

$$\frac{\partial}{\partial\{U\}}\int\limits_{S^{(e)}} \frac{h}{2}(U_\infty^{(e)})^2)\,dS = 0$$

Эта совокупность интегралов может быть записана в компактной форме:

$$\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{U\}} = [k^{(e)}]U + f^{(e)},$$

где

$$[k^{(e)}] = \int\limits_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\,dV + \int\limits_{S^{(e)}} h[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\,dS$$

и

$$\{f^{(e)}\} = -\int\limits_{S^{(e)}} hU_\infty[N^{(e)}]\,dS$$

Получаем окончательную систему уравнений:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\{U\}} = \sum_{e=1}^{E}([k^{(e)}]U + f^{(e)}) = 0,$$

или

$$[K]\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ — матрица жёсткости (теплопроводности), $\{F\}$ — вектор нагрузки.

3. L-координаты

Для треугольного элемента наиболее распространённой является естественная система координат, определяемая тремя относительными координатами L_1, L_2 и L_3. Каждая координата представляет собой отношение расстояния от выбранной точки треугольника до одной из его сторон s к высоте h, опущенной на эту сторону из противолежащей вершины. Ясно, что величина L_i изменяется в пределах от нуля до единицы. Также выполняется свойство: $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

Координатные переменные L_1, L_2 и L_3 представляют собой функции формы для треугольного элемента:

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3$$

Если записать следующие зависимости:

$$x = L_1 X_i + L_2 X_j + L_3 X_k$$
$$y = L_1 Y_i + L_2 Y_j + L_3 Y_k$$
$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

и разрешить их относительно L_1, L_2 и L_3, то в результате получим соотношения:

$$U = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k$$

где

$$N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_i x + c_i y], \quad a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, b_i = Y_j - Y_k, c_i = X_k - X_j$$

$$N_j = \frac{1}{2A}[a_j + b_j x + c_j y], \quad a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, b_j = Y_k - Y_i, c_j = X_i - X_k$$

$$N_k = \frac{1}{2A}[a_k + b_k x + c_k y], \quad a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, b_k = Y_i - Y_j, c_k = X_j - X_i$$

4. Результат

В результате работы программы получено: Пример 1.
Входные данные:
Insert N: 8
Insert T: 100
Insert K1: 1
Insert K2: 10

Пример 2.
Входные данные:
Insert N: 10

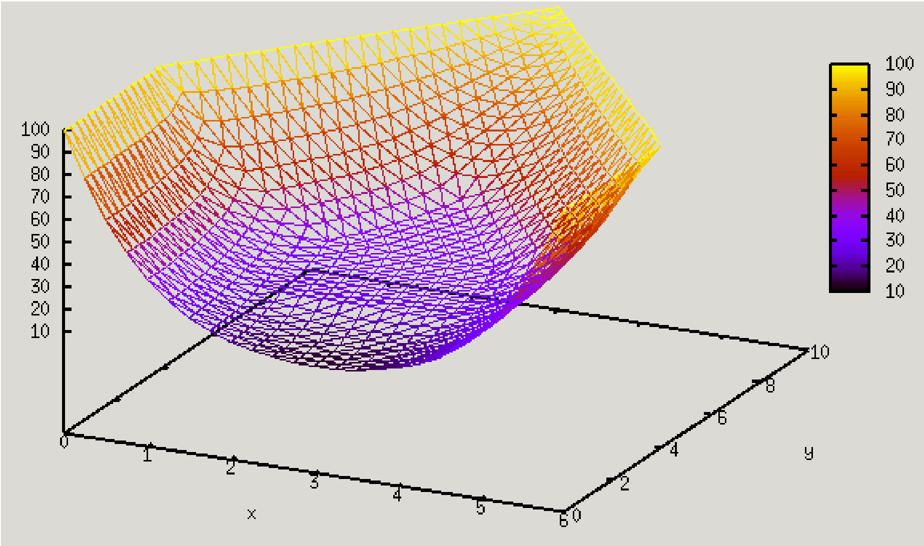

Рис. 2. *Пример 1.*

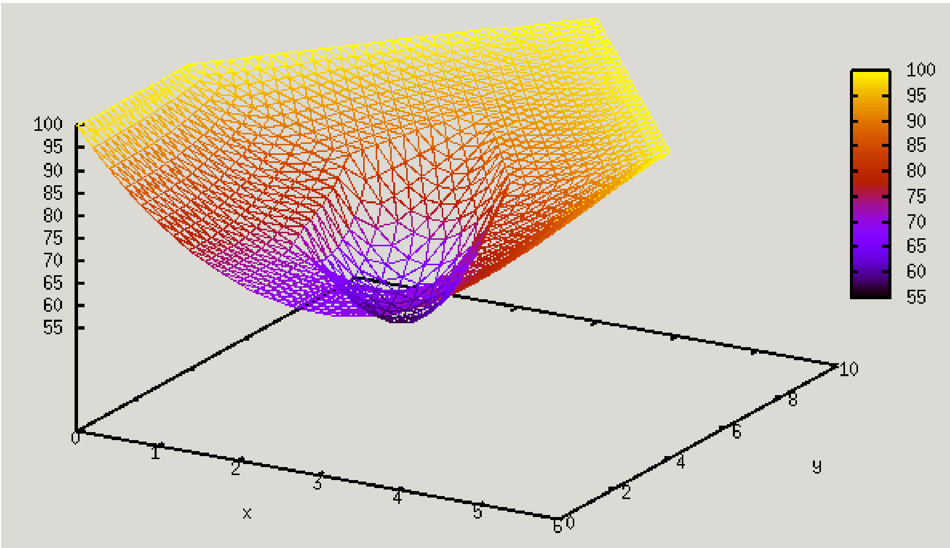

Рис. 3. *Пример 2.*

Insert T: 100
Insert K1: 10
Insert K2: 1

5. Литература

- «Применение метода конечных элементов» Л. Сегерлинд — Мир, - М., 1979