Примерные задачи к экзамену по курсу «Дискретная математика» для студентов групп 2311 и 2361 (2004/2005 уч. год)

(1) Мн-во всех вещественных чисел с операцией сложения $(R, +)$ и мн-во всех положительных действительных чисел с операцией умножения $(R^+, \cdot)$ изоморфны.

Рассмотрим функцию f: $\forall a \in R\ f : a \to 2^a$

Тогда, $f(a+b) = 2^{(a+b)} = 2^a * 2^b = f(a) * f(b)$

(2) Проверить, что изоморфизм алг. структур является отношением эквивалентности на мн-ве всех возможных алг. стр.

Пусть $(M, \circ)$, $(N, *)$ — изоморфные алг. стр. и $\varphi : M \to N$, $\quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

- рефлексивность: изоморфизмом явл. тождественное отображение $\varphi : M \to M$, при котором каждый элемент мн-ва отображается в себя;
- коммутативность: если $\varphi : M \to N$ — изоморфизм, то $\varphi^{-1} : N \to M$ — также изоморфизм (из обратимости любой биекции):

$$\forall a, b \in M \quad \varphi(a) = a',\ \varphi(b) = b' \quad (a', b' \in N)$$

$$a \circ b \Rightarrow a' * b'$$

В обратную сторону:

$$\forall a', b' \in N \quad \varphi^{-1}(a') = a,\ \varphi^{-1}(b') = b \quad (a, b \in M)$$

$$a' * b' \Rightarrow a \circ b$$

- транзитивность: рассмотрим мн-ва M, N, L такие, что M изоморфно N, а N изоморфно L:

$$\exists \varphi : M \to N, \quad \exists \mu : N \to L$$

Докажем, что композиция $f = \mu \circ \varphi$, действующая из M в L, тоже явл. изоморфизмом:

(a) f — биекция, поскольку явл. композицией биекций μ и φ;

(b) $(M, \circ)$, $(N, *)$, $(L, \bullet)$
если $\forall a, b \in M\ a \circ b$, то $a' * b' \quad (a' = \varphi(a), b' = \varphi(b))$;
если $\forall a', b' \in N\ a' * b'$, то $a'' \bullet b'' \quad (a'' = \mu(a'), b'' = \mu(b'))$.

$$a'' = \mu(a') = \mu(\varphi(a)) = f(a)$$

$$b'' = \mu(b') = \mu(\varphi(b)) = f(b)$$

Отсюда получаем: $f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$

(3) Пусть X — произвольное мн-во; 2^X — мн-во его подмн-в. Проверить, что мн-во 2^X является кольцом относительно операций симметрической разности и пересечения, взятых в качестве сложения и умножения соответственно. Какое это кольцо?

...проверить коммутативность и ассоциативность сложения, определить обратную к сложению операцию, установить связь сложения и умножения з-ном дистрибутивности...

(4) Док-ть, что мн-во чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in Q$, является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения.

...установить замкнутость операций, определить ноль и обратную операцию к сложению...

(5) Составить таблицу Кэли для операции вычитания из 5 элементов.

(6) На мн-ве $\{1, ..., 100\}$ рассмотрена операция сложения. Для какого числа пар она определена?

Составляем табл. Кэли и по ней устанавливаем, что

$$n = \frac{(1+99)(99)}{2} = 4950$$

(7) На мн-ве

$$\{x, \frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}, -\frac{1}{x}, -x\}$$

проверить, что композиция является бинарной операцией.

...при помощи табл. Кэли...

(8) M_1—натуральные нечётные, M_2—натуральные чётные. Какие из алг. стр. $(N, \cdot), (M_1, \cdot), (M_2, \cdot)$ изоморфны.

(9) Определены ли на мн-вах N, Z, Q, Q^+, R, R^+ следующие операции:
  (a) $a \circ b \to \frac{a}{b}$
  (b) $a \circ b \to ab - ba$

(10) Ассоциативна ли операция $\circ$ на мн-ве M, если:
  (a) $M = N, x \circ y = x^y$
  (b) $M = Z, x \circ y = x - y$
  (c) $M = N, x \circ y =$НОД(x, y)

(11) Запишите при помощи логических символов св-ва бинарных операций: коммутативность, некоммутативность, ассоциативность, неассоциативность.

(12) В Q определена каждая из следующих операций:
  (a) $a \circ b = \frac{a+b}{2}$
  (b) $a \circ b = \frac{a(a+1)+b(b+1)}{2}$
  (c) $a \circ b = a^2 - 2ab + b^2$

Для каких эл-тов из N определены результаты этих операций.

(13) Показать:
  (a) $[x, y]^{-1} = [y, x]$
  (b) $[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z]$

$$[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$$
$$[xy, z] = xyz(xy)^{-1}z^{-1} = xyzy^{-1}x^{-1}z^{-1} = x(yzy^{-1}z^{-1})zx^{-1}z^{-1} =$$
$$= x[y, z]zx^{-1}z^{-1} = x[y, z]x^{-1}xzx^{-1}z^{-1} = [y, z]x^{-1}[x, z]$$

(14) Док-ть, что если в группе G для каждого элемента выполняется: $a^2 = e$, то группа G — абелева.

Поскольку G—группа, то:
1. $aa = e, \quad aaa^{-1} = ea^{-1}, \quad a = a^{-1}$
2. $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

(15) Док-ть, что мн-во ф-ций вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in R, ad - cb \neq 0$ является группой относительно композиции.

(16) Док-ть, что любая группа, состоящая из трёх элементов, абелева.

Пусть $G = \{a, b, c\}$—группа. Тогда,

1) Пусть для определённости $e = a$. Тогда

$$ba = ab = b, \quad (1)$$

$$ca = ac = c, \quad (2)$$

2) Найдём для b обратный эл-т: $bb^{-1} = a$
Поскольку $b^{-1} \in G$, то возможно три варианта для b^{-1}:
$b^{-1} = a$, но тогда $a = bb^{-1} = ba$, т.е. b — единичный эл-т, чего не может быть, поскольку в группе единичный эл-т единственен;
$b^{-1} = b$, тогда $bb^{-1} = b^2 = a = e \Rightarrow G$ — абелева группа (по ранее доказанному);
$b^{-1} = c$, тогда $bb^{-1} = bc = a$, $cc^{-1} = cb = a \Rightarrow bc = cb \quad (3)$. Согласно соотношениям (1), (2) и (3) группа G — абелева

(17) Док-ть, что любая циклическая подгруппа абелева (даже если группа была неабелева).

(18) Док-ть, что все группы порядка 3 изоморфны между собой.

(19) Пусть G — циклическая группа, $|G| = 15$. Определить число её эл-тов таких, что $\{x\} = G$.
$n = \varphi(15) = 8$, где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, показывающая кол-во чисел до k взаимнопростых с k.