

Экзамен по курсу

1. **Основные понятия теории языков.** Алфавит. Цепочка. Пустая цепочка. Префикс. Суффикс. Длина цепочки. Конкатенация цепочек. Язык. Операции над языками — теоретико-множественные, конкатенация, итерация.
2. **Способы определения языков.** Грамматика. Отношение выводимости и его замыкания. Язык задаваемый грамматикой. Распознаватели. Детерминированные и недетерминированные распознаватели. Грамматики с ограничениями на правила. Иерархия Хомского.
3. **Регулярные множества и регулярные выражения.** Алгебраические свойства регулярных выражений.
4. **Уравнения с регулярными коэффициентами.** Стандартное уравнение с регулярными коэффициентами. Его решение. Стандартная система уравнений с регулярными коэффициентами. Неподвижная точка. Минимальная неподвижная точка. Ее существование и единственность. Алгоритм решения стандартной системы уравнений с регулярными коэффициентами.
5. **Структура решения системы с регулярными коэффициентами.** Теорема о структуре минимальной неподвижной точки стандартной системы уравнений с регулярными коэффициентами.
6. **Конечные автоматы.** Определение недетерминированного конечного автомата. Конфигурация автомата. Отношение такта автомата. Язык, определяемый конечным автоматом. Детерминированный конечный автомат. Построение детерминированного конечного автомата по недетерминированному.
7. **Регулярные множества и праволинейные грамматики.** Построение по регулярному множеству, праволинейной грамматики его задающей. Построение регулярного выражения, обозначающего язык, задаваемый праволинейной грамматикой.
8. **Конечные автоматы и праволинейные грамматики.** Построение праволинейной грамматики задающей язык, распознаваемый детерминированным конечным автоматом.
9. **Конечные автоматы и регулярные множества.** Построение конечного автомата, распознающего регулярное множество.

10. **Минимизация конечных автоматов.** Недостижимые состояния и их устранение. Отношения неразличимости, k -неразличимости и их вычисление. Теорема о минимальности детерминированного конечного автомата без недостижимых и неразличимых состояний.
11. **Лемма о разрастании для регулярных множеств.** Лемма о разрастании для регулярных множеств и ее использование для доказательства нерегулярности множеств.
12. **Свойства замкнутости регулярных множеств.** Замкнутость регулярных множеств относительно объединения, пересечения и дополнения. Замкнутость относительно обращения.
13. **Разрешимость проблем, связанных с регулярными множествами.** Формулировка и разрешимость проблем принадлежности, пустоты и эквивалентности.
14. **Контекстно-свободные грамматики.** Дерево вывода, крона, сечение, левый и правый вывод. Неоднозначная грамматика.
15. **Устранение бесполезных символов.** Проверка пустоты языка. Недостижимые символы. Устранение недостижимых символов. Бесполезные символы. Устранение бесполезных символов.
16. **Устранение цепных и ε -правил.** ε -правила. Устранение ε -правил. Цепные правила. Устранение цепных правил.
17. **Нормальная форма Хомского.** Нормальная форма Хомского. Алгоритм построения нормальной формы Хомского.
18. **Устранение левой рекурсии** Левая рекурсия. Непосредственная левая рекурсия. Устранение непосредственной левой рекурсии. Устранение левой рекурсии в общем случае.
19. **Автоматы с магазинной памятью.** Определение автомата с магазинной памятью. Конфигурация. Такт работы автомата с магазинной памятью. Язык допускаемый автоматом.
20. **Варианты определения автомата с магазинной памятью.** Расширенный МПА. Допуск цепочки с опустошением магазина. Эквивалентность вариантов определения.
21. **Эквивалентность МПА и контекстно-свободных грамматик.** Построение по контекстно-свободной грамматике автомата допускающего с опустошением магазина язык задаваемый грамматике. Построение по автомату с магазинной памятью грамматики задающей язык, распознаваемый автоматом.
22. **Лемма о разрастании для контекстно-свободных языков.** Лемма о разрастании для контекстно-свободных языков и ее применения.

-
23. **Разрешимость проблемы принадлежности для контекстно-языков.** Алгоритм Кока-Янгера-Касами.
 24. **Вычислимость, разрешимость и перечислимость.** Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность различных вариантов определения перечислимых множеств. Перечислимость объединения и пересечения перечислимых множеств.
 25. **Связь между перечислимостью и разрешимостью.** Теорема Поста. Перечислимость и вычислимость.
 26. **Универсальные функции.** Определение универсальной функции. Существование универсальной функции для класса вычислимых функций одного аргумента. Несуществование вычислимой всюду определенной функции двух аргументов, универсальной для класса всех вычислимых всюду определенных функций одного аргумента. Вычислимая функция от которой никакая вычислимая функция не может всюду отличаться. Вычислимая функция, не имеющая всюду определенного вычислимого продолжения.
 27. **Перечислимое неразрешимое множество.** Существование перечислимого неразрешимого множества. Неразрешимость проблемы останова.
 28. **Машины Тьюринга.** Определение детерминированной машины Тьюринга. Язык, распознаваемый машиной Тьюринга. Варианты определения машины Тьюринга. Недетерминированные машины Тьюринга. Связь между задачами о распознавании языка и задачами о вычислении функций.
 29. **Сложность вычислений. Классы сложности** Временная, Емкостная и Колмогоровская сложность. Классы P и NP . NP -полнота и NP -сводимость.
 30. **NP -полнота задачи о выполнимости булевой формулы.** Постановка задачи. Доказательство NP -полноты задачи о выполнимости.
 31. **NP -полнота задач о выполнимости булевой формулы, находящейся в КНФ, 3-КНФ.**

Избранные задачи по курсу

1. Приведите примеры не менее чем пяти языков в алфавите

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e\}.$$

2. Напишите регулярные выражения для следующих языков:

- (а) множество цепочек над алфавитом $\{a, b, c\}$, содержащих хотя бы один символ a и хотя бы один символ b ;
- (б) множество цепочек из нулей и единиц, в которых десятый от правого края символ равен 1;
- (в) множество цепочек из нулей и единиц, содержащих не более одной пары последовательных единиц.

3. Постройте праволинейные грамматики для языков, состоящих из

- (а) идентификаторов произвольной длины, состоящих из букв и цифр, но начинающихся с буквы (например, как в языке Си);
- (б) идентификаторов, которые должны содержать от одного до шести символов и начинаться с буквы I, J, K, L, M или N ;
- (в) целочисленных констант языка Си (напомним, что целочисленные константы в Си бывают восьмеричные, десятичные и шестнадцатеричные, а в конце может следовать суффикс, задающий тип и знаковость константы);
- (г) вещественных констант языка Си;
- (д) всех цепочек из нулей и единиц, имеющих четное число нулей и четное число единиц.

4. Постройте КС-грамматики, порождающие

- (а) все цепочки из нулей и единиц с одинаковым числом тех и других;
- (б) $\{a_1 a_2 \dots a_n a_n \dots a_2 a_1 \mid a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$;
- (в) $\{0^i 1^j \mid i \neq j \text{ и } i, j \geq 0\}$;
- (г) всевозможные последовательности правильно расставленных скобок.

5. Следующая грамматика порождает язык регулярного выражения $0^*1(0+1)^*$.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A1B \\ A &\rightarrow 0A \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Запишите левый и правый вывод, а также нарисуйте деревья вывода следующих цепочек:

- (а) 00101;
- (б) 1001;
- (в) 00011.

6. Постройте КЗ-грамматики, порождающие

- (а) $\{a^{n^2} \mid n \geq 1\}$;
- (б) $\{ww \mid w \in \{a, b\}^+\}$;
- (в) $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^+ \text{ и число букв } a \text{ в цепочке } w \text{ равно числу букв } b, \text{ равному числу букв } c\}$;
- (г) $\{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$.

7. Решите систему уравнений с регулярными коэффициентами

$$\begin{aligned} A_1 &= (01^* + 1)A_1 + A_2 \\ A_2 &= 11 + 1A_1 + 00A_3 \\ A_3 &= \varepsilon + A_1 + A_2 \end{aligned}$$

8. Пусть L — регулярное множество. Докажите, что L^R — регулярное множество.

9. Докажите нерегулярность следующих множеств:

- а) $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$. Это язык, который состоит из всех цепочек, состоящих из нулей, за которыми следует такое же количество единиц.
- б) $\{0^n 10^n \mid n \geq 1\}$;
- в) $\{0^n 1^m 2^n \mid n \text{ и } m \text{ — произвольные целые числа}\}$;
- г) $\{0^n 1^m \mid n \leq m\}$;
- д) $\{0^n 1^{2^n} \mid n \geq 1\}$.

10. Постройте детерминированные конечные автоматы с минимальным числом состояний для следующих регулярных выражений.

- а) $(1 \mid 0)^*0(1 \mid 0)$
- б) $(1 \mid 0)^*0(0 \mid 1)(1 \mid 0)$
- в) $(1)^*(01)^*1001(1^*0)^*$

11. Постройте МП-автоматы, допускающие дополнения (относительно $\{a, b\}^*$) следующих языков:

- (а) $\{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$,
- (б) $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$,
- (в) $\{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$,
- (г) $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

12. Найдите грамматику порождающую $L(P)$, где

$$P = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$$

и δ задается равенствами:

$$\delta(q_0, a, Z_0) = (q_1, AZ_0)$$

$$\delta(q_0, a, A) = (q_1, AA)$$

$$\delta(q_1, a, A) = (q_1, AA)$$

$$\delta(q_1, a, A) = (q_1, A)$$

$$\delta(q_2, a, A) = (q_1, \varepsilon)$$

13. Рассмотрим два следующих языка:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

- (а) покажите, что каждый из них является контекстно-свободным, построив для них КС-грамматики;
- (б) укажите, является ли $L_1 \cap L_2$ КС-языком. Ответ обоснуйте.

14. Найдите грамматику, не содержащую бесполезных символов и эквивалентную следующей грамматике.

$$S \rightarrow AB \mid CA$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow BC \mid AB$$

$$C \rightarrow aB \mid b$$

15. Рассмотрите следующую грамматику:

$$S \rightarrow ASB \mid \varepsilon$$

$$A \rightarrow aAS \mid a$$

$$B \rightarrow SbS \mid A \mid bb$$

- (а) удалите ε -правила;
- (б) удалите цепные правила;
- (в) есть ли в грамматике бесполезные символы? Если да, удалите их;

(г) приведите грамматику к нормальной форме Хомского.

16. Устраните левую рекурсию в следующей грамматике:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AA \mid 0 \\ A &\rightarrow BB \mid 1 \end{aligned}$$

17. Постройте машины Тьюринга для следующих языков:

(а) множество цепочек, с одинаковыми количествами символов 0 и 1;

(б) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$;

(в) $\{ww^r \mid w \text{ — произвольная цепочка из } 0 \text{ и } 1\}$.

18. Постройте МП-автоматы, допускающие следующие языки. Можно использовать как допуск по заключительному состоянию, так и по пустому магазину.

(а) $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$;

(б) множество всех цепочек из 0 и 1, в префиксах которых количество символов 1 не больше количества символов 0;

(в) множество всех цепочек из 0 и 1 с одинаковыми количествами символов 0 и 1.

19. Преобразуйте грамматику

$$\begin{aligned} S &\rightarrow 0S1 \mid A \\ A &\rightarrow 1A0 \mid S \mid \varepsilon \end{aligned}$$

в МП-автомат, допускающий тот же язык по пустому магазину.

20. Преобразуйте МП-автомат $P = (\{p, q\}, \{0, 1\}\{X, Z_0\}, \delta, q, Z_0)$ в КС-грамматику, где δ задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(q, 1, Z_0) &= \{(q, XZ_0)\} \\ \delta(q, 1, X) &= \{(q, XX)\} \\ \delta(q, 0, X) &= \{(p, X)\} \\ \delta(q, \varepsilon, X) &= \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(p, 1, X) &= \{(p, \varepsilon)\} \\ \delta(p, 0, Z_0) &= \{(q, Z_0)\} \end{aligned}$$

Литература

- [1] А. Ахо, Дж. Хопкрофт и Дж. Ульман. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.
- [2] Дж. Хопкрофт, Р. Мотвани и Дж. Ульман. *Введение в теорию автоматов языков и вычислений, 2-е изд.* Издательский дом "Вильямс", Москва, 2002.
- [3] А. Ахо и Дж. Ульман. *Теория синтаксического анализа перевода и компиляции*. Мир, Москва, 1978.
- [4] Н.К.Верещагин и А. Шень. *Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции., 2-е изд., исправленное*. МЦНМО, Москва, 2002. Текст книги доступен в электронной форме по адресу "<ftp://ftp.mcsme.ru/users/shen/logic/comput>".
- [5] Дж. Сэвидж. *Сложность вычислений*. Издательство "Факториал", Москва, 1998.