Задача 1.

Найти экстремум функционала. $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$.

$$\int\limits_a^b f(x, \dot{x}, t) dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \Rightarrow \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = C^2 x^2$$

$$y' = \frac{C \cdot x}{\sqrt{1-C^2x^2}} \Rightarrow y = \int \sqrt{\frac{C^2x^2}{1-C^2x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1-C^2x^2}}{C} + \widetilde{C} .$$

Задача 2.

Найти экстремум функционала. $\int\limits_{x_0}^{x_1} y' \cdot (1 + x^2 y')dx$.

$$\int\limits_a^b f(x, \dot{x}, t)dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \Rightarrow 1 + 2 \cdot y' \cdot x^2 = C$$

$$y = -\frac{C - 1}{2 \cdot x} + \widetilde{C} .$$

Задача 3.

Найти экстремум функционала. $\int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2)dx$.

$$\int_a^b f(x, \dot{x}, t)dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = C \Rightarrow \ x + 2 \cdot y' = C$$

$$y = -\frac{(C - x)^2}{4} + \widetilde{C} .$$

Задача 4.

Решить интегральное уравнение. $y(x) = 1 + \int\limits_0^x (xt)^2 y(t)dt$

$$y'(x) = \int\limits_0^x 2xt^2 y(t)dt + x^4 y(x)$$

$$y''(x) = \int\limits_0^x 2t^2 y(t)dt + 2x^3 y(x) + x^4 y'(x) + 4x^3 y(x) = \int\limits_0^x 2t^2 y(t)dt + 6x^3 y(x) + x^4 y'(x)$$

$$y'''(x) = 0 + 2x^2 y(x) + 18x^2 y(x) + 6x^3 y'(x) + 4x^3 y'(x) + x^4 y''(x) = 20x^2 y(x) + 10x^3 y'(x) + x^4 y''(x)$$

$$y'''(x) - 20x^2 y(x) - 10x^3 y'(x) - x^4 y''(x) = 0$$

Найдём начальные условия:

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$y''(0) = 0$

Для нахождения решения интегрального уравнения необходимо найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} y'''(x) - x^4 y''(x) - 10x^3 y'(x) - 20x^2 y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

Задача 5.

Решить интегральное уравнение. $y(x) = 3x - 4\sin x + 1 + \int\limits_0^x (x-t)y(t)dt$

$y'(x) = 3 - 4\cos x + \int\limits_0^x y(t)dt$

$y''(x) = 4\sin x + y(x)$

$y''(x) - y(x) = 4\sin x$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$

$y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$y_1 = A\cos x + B\sin x$

$y_1' = -A\sin x + B\cos x$

$y_1'' = -A\cos x - B\sin x$

$A = 0$

$B = -2$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 2\sin x$

заметим, что $\begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{matrix}$

$1 = C_1 + C_2$

$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 2\cos x$

$-1 = C_1 - C_2 - 2$

$\begin{cases} C_1 - C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

$y = e^x - 2\sin x$

Задача 6.

Решить интегральное уравнение. $y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int\limits_0^x (x - t)y(t)dt$

$y'(x) = 1 + 2\cos x - \int\limits_0^x y(t)dt$

$y''(x) = -2\sin x - y(x)$

$y''(x) + y(x) = -2\sin x$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$y_{o.o} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_1 = x(A\cos x + B\sin x)$

$y_1' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$

$y_1'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$

$A = 1$

$B = 0$

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x$

$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - x\sin x + \cos x$

заметим, что

$y(0) = -1$

$y'(0) = 3$

$C_1 = -1$

$C_2 = 2$

$y = -\cos x + 2\sin x + x\cos x$

Задача 7.

Решить интегральное уравнение. $y(x) = x + \int_0^1 x \cdot \sin(2\pi \cdot t) y(t) dt$

Это уравнение Фредгольма с вырожденным ядром.
Проверим что K(x,t) и f(x) принадлежат классу L2:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x \sin(2\pi t))^2 dx dt = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{1 - \cos(4\pi t)}{2} dt = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 0\right) < \infty \ ,$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} < \infty \ .$$

$$y(x) = x + \int_0^1 x \cdot \sin(2\pi \cdot t) y(t) dt = x + x\int_0^1 \sin(2\pi \cdot t) y(t) dt$$

Обозначим: $\int_0^1 \sin(2\pi \cdot t) y(t) dt = q$

$$y(x) = qx + x = x + x\int_0^1 \sin(2\pi \cdot t)(qt + t) dt$$

$qx = x\int_0^1 \sin(2\pi \cdot t)(qt + t) dt = x(aq + b)$, откуда:

$$a = \int_0^1 \sin(2\pi \cdot t) t dt = b = \int_0^1 \sin(2\pi \cdot t) t dt$$

$$qx = x(aq + b)$$

$$q = (aq + b)$$

Найдем a и b:

$$\int_0^1 \sin(2\pi \cdot t) t dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 t d\cos(2\pi \cdot t) = -\frac{1}{2\pi}\left(t\cos(2\pi t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(2\pi t) dt \right) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$q = -\frac{1}{2\pi} q - \frac{1}{2\pi}$$

$$q = -\frac{1}{2\pi + 1}$$

$$y(x) = qx + x = \frac{-x}{2\pi + 1} + x = x\left(\frac{2\pi}{2\pi + 1}\right)$$

Задача 8.

Исследовать последовательность на сходимость (на все сходимости):

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, |x| \le n \\ 0, |x| > n \end{cases}$$

$$|x| \le n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$|x| > n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$\forall x \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in N \, \forall n > N$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, последовательность сходится.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{-n} 0dx + \int_{-n}^{+n} \frac{1}{n^2} dx + \int_{n}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{n^2} x\Big|_{-n}^{n} = \frac{2}{n}$, последовательность сходится в среднем.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)dx = \int_{-\infty}^{-n} 0dx + \int_{-n}^{+n} \frac{1}{n^4} dx + \int_{n}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{n^4} x\Big|_{-n}^{n} = \frac{2}{n^3}$, последовательность сходится в среднеквадратичном.

Задача 9.

Исследовать последовательность на сходимость (на все сходимости): $f_n = \begin{cases} x^n, 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x}{n^3}, x > 1 \end{cases}$

$0 \le x \le 1 : \lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$

$x = 1 : \lim\limits_{n \to \infty} x^n = 1$

$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N \exists x_0 \in X \left| f_n(x_0) - f(x_0) \right| \ge \varepsilon$

$x > 1 : \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{n^3} = 0$

$x_0^n = \dfrac{1}{2}$ *получаем* $: x_0 = (\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$ расходится

$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x \le 1, x > 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$

$\int f_n(x)dx = \int\limits_0^1 x^n dx + \int\limits_1^\infty \dfrac{x}{n^3} = \left. \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 + \left. \dfrac{x^2}{2n^3} \right|_1^\infty = \infty$, последовательность расходится в среднем.

$\int f_n^2(x)dx = \int\limits_0^1 x^{2n} dx + \int\limits_1^\infty \dfrac{x^2}{n^6} = \left. \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 + \left. \dfrac{x^3}{3n^6} \right|_1^\infty = \infty$, последовательность расходится в среднеквадратичном.

Задача 10.

Продифференцировать обобщенную функцию, порожденную функцией $y = |x|$ (взять скалярное произведение на функцию $\varphi(x)$ и взять 2 интеграла).

Обобщенная функция, порожденная заданной интегрируемой на любом конечном интервале функцией $y = |x|$, дифференцируема, а её производная представляет собой обобщенную функцию, которая на всех множествах, где существует классическая производная y', совпадает с обобществленной функцией, порождаемой этой производной.

Искомая функция равна $\left(|x|',\varphi\right) = -\left(|x|,\varphi'\right) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|\varphi' dx = \lim\limits_{\eta\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\eta}|x|\varphi' dx + \int\limits_{-\eta}^{+\eta}|x|\varphi' dx + \int\limits_{+\eta}^{+\infty}|x|\varphi' dx\right) =$

$= \int\limits_{-\infty}^{0}|x|\varphi' dx - \int\limits_{0}^{+\infty}|x|\varphi' dx = x\cdot\varphi\Big|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi\, dx - x\cdot\varphi\Big|_{0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty}\varphi\, dx$ $= [\varphi$ обращается в ноль в точках $x = \pm\infty$ вследствие финитности$] = \int\limits_{-\infty}^{0}(-1)\varphi\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty}(+1)\varphi\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} sign(x)\varphi\, dx = (sign(x),\varphi)$, то есть в смысле обобщенных функций $|x|' = sign(x)$.

Задача 11.

Проверить ортогональность и ортонормированность систему:

1, cos(x), sin(x), … , cos(nx), sin(nx) на [0, π].

Система функций называется ортогональной, если попарно ортогональны все ее элементы.

Элементы x и y пространства с введенным в нем скалярным произведением называются ортогональными, если (x,y)=0.

$$\left(f(x), g(x)\right) = \int\limits_X f(x) g(x) dx$$

Рассмотрим функции 1 и sin(x):

$\int\limits_0^\pi 1 \cdot \sin(x) dx = (-\cos(x))\Big|_0^\pi = 2 \neq 0$, следовательно система не ортогональна и не ортонормированна. (В ортонормированной системе $\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$).

Данную систему можно ортогонализовать и ортонормировать при помощи последовательного вычисления ψ_i из исходных φ_i.

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$$

$$\psi_n = \frac{\varphi_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\varphi_n \psi_i\right) \psi_i}{\left\|\varphi_1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\varphi_n \psi_i\right) \psi_i\right\|} \quad n = 2, 3, \dots$$

Задача12.

Найти норму оператора:

$Ax = \int\limits_0^1 t \cdot x(t) dt$, если $x \in C^1[0,1]$

если $x(0) = 0$, а норма x:

$\|x\| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x(t)| + \sup\limits_{t \in [0,1]} |x'(t)|$.

Обозначим максимальные значения функции и её производной на отрезке [0, 1] как M и M_1 соответственно (экстремумы достигаются в силу непрерывности). По теореме о среднем, $x(t) = \int\limits_0^1 f'(\xi) d\xi \Rightarrow \max \left| \int\limits_0^1 f'(\xi) d\xi \right| \leq \int\limits_0^1 |f'(\xi)| d\xi \leq \int\limits_0^1 M_1 d\xi$. То есть $M \leq M_1$.

Одновременно $\max_{x \in [0,1]} |Ax| = \max_{x \in [0,1]} \left| \int\limits_0^1 t x(t) dt \right| = \frac{M}{2}$, откуда $\sup\limits_{x \in [0,1]} \frac{\max_{x \in [0,1]} |Ax|}{\|x\|} = \frac{1}{2}$.

Задача12.

Найти норму оператора:

$$Ax = \int_0^1 t \cdot x(t)dt, \text{ если } x \in C^1[0,1]$$

если $x(0) = 0$, а норма x:

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup_{t\in[0,1]}|x'(t)|.$$

Обозначим максимальные значения функции и её производной на отрезке [0, 1] как M и M_1 соответственно (экстремумы достигаются в силу непрерывности). По теореме о среднем, $x(t) = \int_0^1 f'(\xi)d\xi \Rightarrow \max\left|\int_0^1 f'(\xi)d\xi\right| \le \int_0^1 |f'(\xi)|d\xi \le \int_0^1 M_1 d\xi$. То есть $M \le M_1$.

Одновременно $\max_{x\in[0,1]}|Ax| = \max_{x\in[0,1]}\left|\int_0^1 tx(t)dt\right| = \frac{M}{2}$, откуда $\sup\limits_{x\in[0,1]} \frac{\max_{x\in[0,1]}|Ax|}{\|x\|} = \frac{1}{2}$.

Задача 13.

Сходится ли по норме $\|f(x)\| = \max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ в пространстве функций, непрерывных на отрезке [0, 1]:

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$

а) найдем $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0$$

$$n - (n+1)x = 0$$

$$x = \frac{n}{n+1}$$

$f(0) = f(1) = 0$, следовательно максимум достигается при $x = \dfrac{n}{n+1}$

$$\|f(x)\| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$ => сходится

а) найдем $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$

$$f'_n = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$$

$$1 - 2x^n = 0$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$f(0) = f(1) = 0$, следовательно максимум достигается при $x = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}$

$$\|f(x)\| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)| = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$ => не сходится

Задача 14.

Определить норму оператора нулевого, тождественного и оператора подобия:

а) $A_1 x \equiv 0$,

б) $A_2 x \equiv x$,

в) $A_3 x \equiv \lambda \cdot x$, при $\lambda \in C$.

По определению: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$

а) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|0\| \equiv 0$

б) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|x\| = 1$

в) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|\lambda x\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|x\| = |\lambda|$