МГИУ

Введение в функциональный анализ

V семестр

Москва 2005

Глава 1

Основные понятия функционального анализа

1 Пространства.

1.1. Понятие пространства, базис пространства. Будучи категорийным, как и множество, это понятие не поддается определению в строгом смысле этого слова. Описательно можно сказать, что оно означает совокупность некоторых объектов, называемых *элементами,* или *точками,* пространства и обладающих определенными оговоренными общими для всех точек свойствами. При этом мы отвлекаемся от природы объектов и возможных других свойств. Поскольку исторически одним из первых сложилось понятие евклидова пространства, совокупность определяющих само пространство свойств называют его *геометрией.*

В предыдущих математических курсах приходилось встречаться и с другими пространствами, кроме евклидова, которое изучалось в школьной геометрии, исходя из принятой системы аксиом. Аксиомы плоской геометрии определяли свойства объектов на плоскости, а следовательно, и саму плоскость как особое пространство. Дополненные еще некоторыми аксиомами, они же задают и геометрию собственно евклидова трехмерного пространства. Элементами в обоих случаях служат точки.

Как примеры знакомых пространств можно упомянуть:
множество действительных чисел R, определяемое системой аксиом действительных чисел, которая вводится в начале того раздела математического анализа, где изучаются функции одного действительного переменного;
множество комплексных чисел C, также определяемое своей системой аксиом, дополняюших систему аксиом действительных чисел;
множество $n-$мерных векторов;
класс функций $C[a, b]$, состоящий из функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

класс функций $C^m[a,b]$, состоящий из функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ вместе со своими m первыми производными и т.д.

Элементами (точками) пространства могут быть и некоторые действия, операции. Например, широко распространенный и изученный класс составляет класс так называемых линейных операторов, о сущности которых будет сказано позже.

Многочисленные примеры пространств можно будет назвать после изучения этого курса.

Свойство линейности. В дальнейшем нам придется обычно иметь дело с пространствами, для которых имеют смысл 2 операции:
1) так называемая операция сложения (суммирования), когда любым двум элементам пространства ставится в соответствие некоторый элемент того же пространства,
2) так называемая операция умножения любого комплексного числа, называемого скалярным множителем, на произвольный элемент пространства, причем результат должен быть элементом того же пространства. Иногда, вместо комплексного множителя, допускается лишь действительное число. Очевидно, что в этом втором случае рассматриваемое пространство является подпространством (подмножеством) первого пространства.

Для того чтобы пространство можно было назвать линейным, обе операции вместе и совокупность элементов, по их определению, должны обладать свойствами, знакомыми по аксиоматике действительных чисел (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, наличие нулевого, единичного, противоположного элементов). Напомним их (далее x и y - произвольные элементы пространства, a, b - произвольные комплексные либо чисто действительные числа).
$1) x+y=y+x \quad 2) x+(y+z)=(x+y)+z \quad 3) x+0=x \quad 4) x+(-x)$[противоположный элемент]$=0 \quad 5) a(bx)=(ab)x \quad 6) a(x+y)=ax+ay \quad 7) (a+b)x=ax+bx \quad 8) 1\cdot x=x.$

Выполнение этих свойств для действительных чисел обеспечивается непосредственно их аксиоматикой. Линейность множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ также следует из их определения, из правил действий с комплексными числами.

Пример 1.1. *Исследовать линейность пространства трехмерных свободных действительных векторов при использовании а) действительных и б) комплексных скалярных коэффициентов.*

Р е ш е н и е: Операции сложения и умножения вектора на число определим обычным способом – покоординатно, нулевой элемент - это вектор (0,0,0), а за противоположный к $\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$ вектор принимается $(-a_1, -a_2, -a_3)$.
а) Рассмотрим случай, когда умножение осуществляется только на действительные множители. При этом все $\alpha \cdot \bar{a}$ также представляют собой свободные векторы с действительными координатами, как и все векторы в соотношениях 1)-5), причем все равенства (что проверяется непосредственно) остаются справедливыми. Обсуждаемое пространство линейно.

При б) вектор $(\alpha + i\beta)\bar{a}$ при $\beta \neq 0$ имеет комплексные координаты и не входит в исходное множество. Рассматриваемая структура не обладает свойством линейности.

Базис и размерность пространства. В линейной алгебре вводилось и использовалось понятие линейной зависимости (и независимости) векторов. Аналогичное понятие можно ввести для любого линейного пространства.
Элементы x_i ($x_i \in P, \quad i = 1, 2, ...n$) называются *линейно зависимыми*, если существуют скалярные множители α_i, не все равные нулю, такие, что при них возможно равенство

$$(1.1) \qquad \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n = 0.$$

В противном случае, когда указанное равенство (1.1) возможно только при всех $\alpha_i = 0$, элементы x_i считаются линейно независимыми. Например, в пространстве $n-$мерных векторов в R^n линейно независим, как это доказывалось в алгебре, набор векторов $\bar{x}_1 = (1, 0, 0...)$, $\bar{x}_2 = (0, 1, 0...), ...\bar{x}_n = (0, 0..., 1)$. Для линейно независимых элементов справедливость равенства (1.1) означает, что все $\alpha_i \equiv 0$, и обратно, если из справедливости (1.1) следует, что $\alpha_i \equiv 0$, это означает линейную независимость подмножества x_i, $i = 1, 2, ...n$. При этом любая часть этого подмножества также линейно независима.
Бесконечное множество элементов называется линейно независимым, если независимо любое его конечное подмножество. Если в пространстве существует бесконечное число независимых элементов, пространство считается *бесконечномерным.* Если же в нем имеется N независимых точек, а любые $N+1$ элементов линейно зависимы, оно называется $N-$мерным, как в случае, когда рассматриваются $N-$мерные

векторы.

И в том и в другом случае конечный (имеющий ровно N) или бесконечный набор линейно независимых элементов называется *базисом* пространства. Показывается, что любая точка пространства представляется в виде линейной комбинации элементов базиса (в виде ряда при бесконечномерном пространстве.)

Пример 1.2. *Показать, что $N+1$ функции вида $\varphi_k = x^k$ $(k = 0, 1, .., N)$ представляют собой линейно независимую систему* $1; x; x^2; ...x^N$.

Р е ш е н и е: Рассмотрим линейную комбинацию всех функций системы и приравняем ее нулю $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x^1 + \alpha_2 \cdot x^2 + ... + \alpha_N \cdot x^N = 0$. Докажем, что равенство может выполняться только при всех $\alpha_k = 0$. Действительно, последовательное $N-$кратное дифференцирование обеих частей равенства приводит к соотношениям $\alpha_1 + 2\alpha_2 \cdot x + ... + N\alpha_N \cdot x^{N-1} = 0; \qquad 2\alpha_2 + ... + N(N-1)\alpha_N \cdot x^{N-2} = 0; \qquad N!\alpha_N = 0.$ Последовательное вычисление коэффициентов из этой системы дает значения

$$\alpha_N = \alpha_{N-1} = ... = \alpha_1 = \alpha_0 = 0,$$

что и доказывает независимость приведенной системы функций. Добавим к доказанному, что в силу произвольности N , оказывается: бесконечная система $x^k, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$ линейно независима.

1.2. Метрика; метрические пространства. Назовем метрикой пространства неотрицательную действительную функцию, определенную на всевозможных парах элементов (обозначенных далее строчными символами, например, a, b) рассматриваемого пространства, если она удовлетворяет трем требованиям (аксиомам):
1) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ (условие симметрии)
2) $\rho(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ (аксиома тождественности)
3) $\rho(a, b) \le \rho(a, x) + \rho(x, b)$ (неравенство треугольника)

Метрика характеризует количественно отличие одного элемента от другого, “расстояние” между ними, а в случае линии, плоскости и трехмерного евклидова пространства обычно просто совпадает с расстоянием. Пространство вместе с введенной в нем метрикой называется *метрическим.* Очевидно (а далее это будет подтверждено примерами), что для одного и того же набора элементов ввести метрику (метризовать) можно многими способами (хотя бы изменением масштаба, если уже введенная метрика совпадает с геометрическим расстоянием). При этом получается, что одни и те же совокупности элементов могут образовывать разные метрические пространства. Обозначение метрического пространства должно включать в себя не только название множества элементов, но и введенную метрику. Однако второй символ часто опускают, если по контексту ясен смысл введеной метрики. Очевидно, что любое подпространство исходного метрического пространства тоже представляет собой метрическое пространство с той же метрикой. Если же для него введена своя, особая метрика, строго говоря, его уже нельзя считать подпространством исходного метрического пространства.

Некоторые свойства так введенной метрики можно наглядно интерпретировать геометрически (включая и требование 3).) Рассмотрим 4 элемента x, y, z, t. Для связанных с ними метрик справедливы неравенства

$$\rho(x,y) < \rho(y,z) + \rho(x,z) < \rho(y,z) + \rho(z,t) + \rho(x,t),$$

$$\rho(z,t) < \rho(x,t) + \rho(x,z) < \rho(y,z) + \rho(x,y) + \rho(x,t)$$

Вычитая из первого из них $\rho(z,t)$, а из второго $\rho(x,y)$, придем к соотношениям

$$\rho(x,y) - \rho(z,t) < \rho(y,z) + \rho(x,t),$$

$$\rho(z,t) - \rho(x,y) < \rho(y,z) + \rho(x,t),$$

которые можно записать в виде одного неравенства

$$|\rho(x,y) - \rho(z,t)| < \rho(y,z) + \rho(x,t), \tag{1.2}$$

и сформулировать свойство: разность противоположных сторон четырехугольника меньше суммы двух других сторон. А приняв $z = y$ из (1.2) получаем вторую часть “школьного” утверждения, именуемого неравенством треугольника (каждая сторона треугольника меньше суммы других сторон, но больше их разности). Здесь $|\rho(x,y) - \rho(y,t)| < \rho(x,t)$.
Конечно, наглядная геометрическая интерпретация - это только частный случай общих свойств метрики, какова ни была бы природа элементов.

Рассмотрим несколько примеров метрических пространств.

Пример 1.3. *Установить метрику для множества действительных чисел R.*

Р е ш е н и е: Самая распространенная и "естественная" метрика для R - это модуль разности между числами $|a-b|$. По свойствам модуля, выполнение всех требований 1)-3) очевидно. (см. также пример (1.12))

Пример 1.4. *Показать, что в множестве (пространстве) групп, состоящих из n упорядоченных действительных чисел каждое, метрику можно ввести с помощью нижеследующего соотношения: если $(x_1,x_2,..,x_n)=:X$, $(y_1,y_2,..,y_n)=:Y$, то примем* $\rho(X,Y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$.

Р е ш е н и е: Как это следует из предыдущих разделов математики, рассматриваемый элемент пространства представляет собой $n-$мерный вектор. Первые две аксиомы непосредственно следуют из определения, а неравенство треугольника в обсуждаемом случае для элементов X,Y,Z приобретает вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2} \tag{1.3}$$

Справедливость этого соотношения можно доказать на основании известного неравенства Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2 \tag{1.4}$$

Обозначим $(x_k-z_k)=a_k$ и $(z_k-y_k)=b_k$. Тогда (1.3) перепишется в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2},$$

что справедливо в силу того, что

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2$$

(в неравенстве здесь использовано неравенство (1.4)).

Пример 1.5. *Показать, что в классе* $C[a,b]$ *(множестве функций, непрерывных на отрезке* $[a,b]$*) можно ввести метрику* $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Р е ш е н и е: Выполнение двух первых требований с очевидностью следует из определения метрики. Третье также удовлетворяется, поскольку $\rho(f,h) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f - g + g - h| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f - g| + \max\limits_{x\in[a,b]} |g - h| = \rho(f,g) + \rho(g,h)$.

Пример 1.6. *Рассмотрим пространство, состоящее из последовательностей* $(x_1, x_2, ...)$, *члены которых - действительные числа* x_i *- удовлетворяют условию: для любой из последовательностей ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ *сходится. Показать, что в качестве метрики пространства можно взять* $\rho(X,Y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2}$ *(здесь использованы обозначения, подобные обозначениям предыдущего примера:* $X = (x_1, x_2, ...)$ *и т.д.)*

Р е ш е н и е: Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2$ сходится, поэтому так введенная в качестве метрики функция имеет смысл. (Сходимость ряда определяется по признаку сравнения, поскольку $(x_k - y_k)^2 \leq 2x_k^2 + 2y_k^2$). Выполнение требований 1) и 2) очевидно. Неравенство треугольника в данном случае имеет тот же вид, что и (1.3), только суммирование подкоренных выражений осуществляется до ∞, а не до n. В случае конечного n справедливость неравенства уже доказана. Устремляя $n \to \infty$, получим выполнение третьего требования для рассматриваемой метрики. Заметим кстати, что так введенное метрическое пространство обозначается обычно как l_2. Если от исходной последовательности потребовать сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^p$ и ввести метрику $\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^p}$, получится метрическое пространство с аналогичной метрикой, обозначаемое как l_p.

Если между пространствами X и Y установлено взаимно однозначное соответствие (биекция), а в каждом из них введена метрика, причем $\rho(x_1, x_2) = \rho(y_1, y_2)$ для любых пар соответствующих элементов, X и Y называются *изометричными.* Во всех вопросах, основанных на понятии метрики, оба пространства рассматриваются как эквивалентные, независимо от природы образующих их элементов. Так изометричны множество точек на прямой, если метрикой служит геометрическое расстояние, и множество действительных чисел $\mathbb{R}$, если метрикой служит модуль их разности $|x_1 - x_2|$. Биективное соответствие устанавливается введением оси координат на прямой.

На основе понятия метрики вводятся другие широко распространенные понятия, важные для изучения свойств пространств; метрика позволяет использовать понятие предельного перехода, на основе чего строятся дифференциальное и интегральное исчисления.

На основе метрики определяется расстояние между двумя множествами X и Y одного и того же метрического пространства P : если $X \subseteq P, \quad Y \subseteq P$, то назовем расстоянием между X и Y

$$d(X, Y) := \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y)$$

и подобным же образом определен диаметр подмножества $E \subseteq P$:

$$diam E := \sup_{x,y \in E} \rho(x, y).$$

Множество называют *ограниченным,* если его диаметр конечен.

1.3. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. С помощью метрики определяется понятие окрестности элемента p_0 как множества точек p таких, что $\rho(p_0, p) < r$. Это множество называют r-окрестностью точки p_0, или открытым шаром $B(p_0, r)$. При этом замкнутым r-шаром с центром в p_0 назовем совокупность точек из P, удовлетворяющих условию $\rho(p_0, p) \leq r$. (Обозначим его как $\bar{B}(p_0, r)$).

Множество X, входящее в P, называется *открытым* в P, если для любой точки $x \in X$ найдется такой открытый шар $B(x, \delta)$, что $B(x, \delta) \subset X$. Из этого определения следует, что шар $B(p_0, r)$, его внешность $\{x \in X | \rho(p_0, p) > r\}$ - это множества открытые. Также открытым можно считать и пустое множество $\emptyset$.

Множество $Y \subset P$ называется *замкнутым* в метрическом пространстве (P, ρ), если его дополнение $P \setminus Y$ в P открыто.

Поскольку $P \setminus P = \emptyset$. из предыдущего следует, что все рассматриваемое пространство P и пустое $\emptyset$ оба, в отличие от всех остальных множеств, обладают как свойством замкнутости, так и свойством открытости.

Полуинтервалы $(a, b]$ или $[a, b)$ действительной оси $\mathbb{R}$ не обладают ни свойством открытости, ни свойством замкнутости.

Пример 1.7. *Доказать, что объединение* $\cup X_i \quad (i = 1, .., n)$ *конечного числа множеств* X_i*, каждое из которых открыто в* P*, также открыто в* P*.*

Р е ш е н и е: Любой элемент объединения x принадлежит, по меньшей мере, одному из X_i, а значит, может быть принят, по определению открытости X_i, за центр некоторого шара $B(x, \delta)$, все элементы которого принадлежат этому X_i и следовательно,
$B(x, \delta) \subset \cup X_i$, что и доказывает утверждение.

Точку a назовем предельной для множества X, если в любой ее окрестности $B(a, \delta)$ содержится бесконечное число элементов, принадлежащих X; $\big(\rho(a, x) < \delta \bigwedge x \in X\big)$. Предельные точки могут быть элементами множества, но могут и не входить в него. Так, например, все внутренние точки открытого шара $B(a, r)$. являются предельными для него. Одновременно точки x границы, для которых $\rho(a, x) = r$, также предельные. В открытый шар они не входят.

Объединение множества $X \in P$ и множества всех его предельных точек называют *замыканием* X *в* P и обозначают обычно $\bar{X}$. Ясно, что $P \setminus \bar{X}$ пространство открытое (поскольку каждая из предельных точек множества X включена в $\bar{X}$), а поэтому $\bar{X}$ – замкнутое множество. Множество X метрического пространства P называется *плотным в* P, если замыкание $\bar{X}$ совпадает с P. Например, множество рациональных чисел Q плотно в R. При изометрическом отображении F, если подмножество A, входившее в прообраз P было плотно в P, то образ $F(A)$ останется плотным в $F(P)$.
По отношению к множествам любой природы, как и по отношению к числовым множествам, остается справедливым утверждение: *множество* $X \in P$ *замкнуто в* P *тогда и только тогда, если оно содержит все свои предельные точки.* ????

Обратим внимание, что “окружающее” множество P играет принципиальную роль. Например, если $(a, b) = P$, то он замкнут в P, Но если $(P = R)$ то тот же интервал на оси представляет собой открытое множество.

С введением окрестностей (открытой и замкнутой) точки-элемента рассматриваемое пространство становится, как говорят, *топологическим.* Любое метрическое пространство одновременно и топологическое, но понятие топологического пространства носит более общий характер, и его можно ввести, минуя понятие метрики, с использованием открытых и замкнутых множеств. Имеются примеры неметризуемых метрических пространств. Однако, поскольку многие важные для практического использования свойства топологических пространств характерны и для пространств метрических, в дальнейшем мы, в основном, последними и ограничимся.

Назовем *компактом* любое множество K рассматриваемого пространства, обладающее тем свойством, что из любой совокупности открытых множеств, покрывающих K, можно выделить конечную совокупность, тоже покрывающую K. Примером компакта в случае пространства R служит любой отрезок, так как для него, как известно, справедлива лемма Гейне-Бореля о выделении конечного покрытия. При этом было доказано, что любой компакт в R - множество замкнутое и ограниченное. Аналогичное утверждение справедливо для других метрических пространств.

1.4. Сходимость, полнота множества. Рассмотрим последовательность элементов $\{x_1, x_2, ...\}$ в метрическом пространстве X. Назовем последовательность x_i *сходящейся по метрике к* x, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N^*, что при всех $i > N^* \quad \rho(x, x_i) < \varepsilon$. Таким образом, какую окрестность $B(x, \varepsilon)$ точки x ни взять, все члены последовательности с номерами, превышающими N^*, содержатся в $B(x, \varepsilon)$. Элемент x называется в этом случае пределом последовательности. Очевидно, для сходящейся последовательности $\lim\limits_{i \to \infty} \rho(x, x_i) = 0$.

Последовательность $\{x_1, x_2, ...\}$, как и в случае числовых множеств, назовем *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N^*, что при $(m > N^*) \bigwedge (n > N^*) \qquad \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к какому-либо элементу этого пространства, называется *полным*. Как известно из курса анализа, числовые последовательности действительных чисел, удовлетворяющие критерию Коши (то есть фундаментальные) сходятся к действительным числам. Таким образом, R является пространством полным. Свойством полноты обладает также и множество комплексных чисел C. Если же из них удалить всего один элемент (точку), R и C перестают быть полными. Например, в $R \setminus \{0\}$ последовательность $\{1/n\}$, оставаясь фундаментальной, по-прежнему сходится к 0, однако 0 не входит в рассматриваемое пространство; $R \setminus \{0\}$ не является полным пространством.

При применении многих численных методов решения научно-технических задач последовательно получают приближенные решения, сходящиеся к некоторому пределу. Полнота множества приближенных решений важна при этом для того, чтобы предельное решение существовало и было бы точным решением задачи, сохраняющим основные черты приближенных.

В полном пространстве справедлив критерий Коши.

Пример 1.8. *Показать, что класс непрерывных на* $[a, b]$ *функций с метрикой* $\rho(f(x), g(x)) = \max\limits_{x\in[a,b]} |g-h|$ *образует полное метрическое пространство.*

Р е ш е н и е: Любая фундаментальная последовательность функций из рассматриваемого пространства с введенной метрикой $f_n(x) \in C\big([a, b], \rho\big)$ обладает тем свойством, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ (|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$$

для любого $x \in [a, b]$. Из этого следует, что каждая числовая последовательность $f_i(x)$ при фиксированном $x \in [a, b]$ фундаментальна и, по критерию Коши, сходится. Остается лишь показать, что получаемая при этом предельная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то есть принадлежит рассматриваемому пространству. Оценим $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ для произвольной точки $x \in [a, b]$. Применим распространенный прием вычитания и добавления необходимых величин, позволяющий произвести необходимую оценку

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \le$$

$$\le \big(|f(x + \Delta x) - f_n(x + \Delta x)| + |f_n(x + \Delta x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|\big)$$

Крайние слагаемые в правой части неравенства, в силу сходимости f_n к f сколь угодно малы при достаточно больших n, а при любом n выбором достаточно малого Δx, в силу непрерывности каждого члена последовательности $f_n(x)$, добиваемся необходимой малости $|f_n(x + \Delta x) - f_n(x)|$. Таким образом, из $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta f \to 0$, что и доказывает непрерывность предельной функции и полноту рассматриваемого метрического пространства.

1.5. Пополнение метрического пространства. Во многих случаях бывает желательным оперировать с полным метрическим пространством. Если рассматриваемые элементы полного пространства не образуют, возникает вопрос, нельзя ли дополнить их множество до полного метрического пространства с неизменной исходной метрикой. Положительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 1.1. *Пусть P - это метрическое пространство (не обязательно полное). Тогда существует полное метрическое пространство M, обладающее следующими свойствами:*
1. P изометрично некоторой части $M_1 \subset M$,
2. M_1 плотно в M.
При этом любые два пространства M и M^*, удовлетворяющие требованиям 1. и 2. изометричны между собой. Пространство M называют <u>*пополнением*</u> *исходного пространства P.* (В этом смысле пополнение определяется единственным образом.)

Не проводя полного формального доказательства теоремы, отметим все же основные его этапы и приемы, указав конструктивный способ построения требуемого множества M. Для начала все фундаментальные последовательности множества P, имеющие один и тот же предел (может, и не входящий в P), объединим в один класс, определяемый значением этого предела. Назовем эти классы $X, Y, ...$ итд. по значению общего предела. Их и считаем элементами искомого пространства M. (Примером конкретного воплощения описанной процедуры служит построение множества действительных чисел R на основе рациональных чисел Q, когда каждое иррациональное число получается как предел некоторой последовательности рациональных десятичных дробей. При этом R можно считать пополнением Q.)

За расстояние между X и Y примем $\lim\limits_{\beta \to \infty} \rho(x_\beta, y_\beta) =: \rho(X, Y)$, где x_β, y_β - любые фундаментальные последовательности, принадлежащие соответствующим классам. Можно показать, что такое определение правомерно, поскольку определяет метрику $\rho(X, Y)$, не зависящую от выбора последовательностей из X, Y и удовлетворяющую требованиям (1.2).

Если вышеупомянутые значения пределов входили в P, то очевидно, что для соответствующих классов (они составляют M_1) расстояние $\rho(X, Y)$ равно расстоянию между предельными значениями в метрике P, то есть справедливо первое утверждение теоремы.

Утверждение о плотности M_1 в M следует из того, что если Y - произвольный класс (элемент) из M, а $\{y_\beta\}$ - фундаментальная последовательность из него, так что каждому y_β соответствует "свой" класс $\{Y_\beta\}$, то при произвольном $\varepsilon > 0$ найдется такой номер b, что для всех $\beta > b \quad \rho(y_\beta, y_{\beta+k}) < \varepsilon$ и тогда

$$\rho(Y, Y_\beta) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(y_\nu, y_\beta) \le \varepsilon.$$

Это означает, что класс Y есть предел классов $\{Y_\beta\}$, принадлежащих, по построению, M_1, то есть M_1 плотно в M.

Ценой несложных, но требующих места и времени рассуждений доказывается также, что любая фундаментальная последовательность классов $\{Y_\beta\}$ из M имеет в M предел, то есть пространство M полное и что любое другое M^*, обладающее теми же свойствами, изометрично M.

Таким образом всякое метрическое пространство включено в некоторое полное метричское пространство. Пополнение имеет смысл наименьшего полного метрического пространства, содержащего исходное неполное. (Словом "наименьшее" мы хотим здесь отметить то свойство, что удаление какого-либо элемента из пополнения разрушает его полноту.)

Пополнение уже полного пространства P совпадает с P.

1.6. Непрерывность отображений, равномерная непрерывность. Пусть имется отображение f метрического пространства P в метрическое же пространство Q ($P \xrightarrow{f} Q$, или $f(P) = Q$). Отображение называется непрерывным в точке (элементе) $p_0 \in P$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая величина δ, что для всех $p \in P$ из $\rho_P(p, p_0) < \delta$ выполняется $\rho_Q(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$. (Метрики в пространствах P и Q, вообще говоря, могут быть разными, что отмечено индексами при ρ). Если отображение непрерывно в каждой точке пространства, говорят, что оно непрерывно на P.

Пример 1.9. *Пусть пространство P - это множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой $\rho_P\big(p_1(x), p_2(x)\big) = \max\limits_{x\in[a,b]} |p_1(x) - p_2(x)|$. Исследовать непрерывность отображения $Q = f(P)$, если $f(p(x)) = p(\frac{a+b}{2})$. (Напомним, что отображение, при котором прообразом служит множество функций, а образом - множество чисел, называют обычно функционалом.)*

Р е ш е н и е: В пространстве Q введем естественную метрику $\rho_Q\big(f(p_1), f(p_2)\big) = |p_1(\frac{a+b}{2}) - p_2(\frac{a+b}{2})|$. При этом $\rho_Q\big(f(p_1), f(p_2)\big) \le \rho_P\big(p_1(x), p_2(x)\big)$, так что при произвольном $\varepsilon > 0$ достаточно взять

$\delta = \varepsilon$, и оба неравенства из определения непрерывности отображения будут справедливы.

Отображение $Q = f(P)$ называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая величина $\delta > 0$, что для всех $p \in P$ $\rho_Q(f(p_1), f(p_2)) < \varepsilon$, если только $\rho_P(p_1, p_2) < \delta$. При этом, как и ранее, подчеркнем, что δ чаще всего зависит от ε, но не может зависеть от $p_1, p_2 \in P$. Справедлива

Теорема 1.2. *Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.*

$\Diamond$ Допустим, что отображение компакта $K \xrightarrow{f} Q$ непрерывно, но не равномерно непрерывно. Это означает, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что в K можно найти такие две последовательности $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$, что хотя их элементы с одинаковыми номерами сближаются с ростом n по закону $\rho_K(x_n, x_n^*) < \varepsilon$, расстояние между их образами превышает ε то есть $\big(\rho_Q(f(x_n), f(x_n^*)) > \varepsilon\big)$. Из $\{x_n\}$ выберем подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $x \in K$; тогда парные к членам подпоследовательности x_{n_j} элементы $x_{n_j}^*$ образуют последовательность, тоже сходящуюся к x. Одновременно, поскольку $\rho_Q(f(x_n), f(x_n^*)) > \varepsilon$, по неравенству треугольника, хотя бы одно из расстояний $\rho_Q(f(x_{n_j}), f(x))$ или $\rho_Q(f(x), f(x_{n_j}^*))$ превышает $\varepsilon/2$, что противоречит непрерывности отображения. $\Diamond$

Замечание. В простейшем случае при изучении свойств непрерывной функции одного переменного эта теорема формулировалась так: функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Взаимно однозначные непрерывные отображения двух линейных пространств друг в друга назовем *изоморфизмом.* Сами пространства, для которых существует изоморфизм, назовем *изоморфными.*

1.7. Принцип сжимающих отображений. Пусть отображение $f : X \longrightarrow X$ - это отображение метрического пространства X самого в себя. (Если $x \in X$, то $f(x) \in X$.)

Определение 1.1. *Элемент $a \in X$ называется неподвижной точкой отображения f, если он отображается сам в себя $f(a) = a$.*

Определение 1.2. *Отображение метрического пространства (X,ρ) в себя называется сжимающим, если существует такое число q $(0<q<1)$, что для любых элементов $x_1,x_2\in X$ из X справедливо неравенство*

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\le q\rho(x_1,x_2) \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. *1. Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет и притом только одну неподвижную точку a.*
2. Итерационная последовательность $\{x_0,\quad x_1=f(x_0),...,$ $x_n=f(x_{n-1}),..\}$ сходится к a при произвольном начальном элементе $x_0\in X$, причем скорость сходимости оценивается неравенством $\rho(x_n,a)\le\dfrac{q^n}{1-q}\rho(x_0,a)$.

$\Diamond$ Докажем оба утверждения. Возьмем произвольную точку x_0 и проследим за результатами последовательного применения сжимающего отображения. Можно отметить, что в силу предположения (**??**), $\quad\rho(x_{n+1},x_n)\le q\rho(x_n,x_{n-1})\le...\le q^n\rho(x_1,x_0)$.
Последовательное применение k раз неравенства треугольника вместе с полученной оценкой приводит к неравенствам

$$\rho(x_{n+k},x_n)\le\rho(x_{n+1},x_n)+\rho(x_{n+2},x_{n+1})+...\rho(x_{n+k},x_{n+k-1})\le$$

$$\le(q^n+q^{n+1}+...+q^{n+k-1})\rho(x_1,x_0)\le\frac{q^k}{1-q}\rho(x_1,x_0). \qquad (*)$$

(В последнем неравенстве использована оценка суммы членов геометрической прогрессии с $0<q<1$.) Итак, рассматриваемая итерационная последовательность фундаментальная и потому в полном пространстве оказывается сходящейся, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, где $a\in X$. Одновременно, по непрерывности, $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(a)$, то есть a - неподвижная точка отображения.

Единственность ее следует из того, что при наличии двух разных точек a_1 и a_2 должно выполняться соотношение $\rho(a_1,a_2)=$ $=\rho(f(a_1),f(a_2))\le q\rho(a_1,a_2)$, что возможно лишь при $\rho(a_1,a_2)=0$, то есть при $a_1=a_2$. Оценка скорости сходимости получается из (*) переходом к пределу при $k\to\infty$. Таким образом, a - единственное решение уравнения $f(x)=x$. $\Diamond$

Пример 1.10. *Докажем, опираясь на принцип сжимающих отображений, теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y'(x) = f(x, y(x))$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Относительно правой части уравнения $f(x, y)$ предположим, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) она непрерывна по обоим аргументам, а по второму удовлетворяет условию $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < C|y_2 - y_1|$. (Здесь C - некоторая постоянная.) Докажем, что при этом в некоторой окрестности точки x_0 существует единственная дифференцируемая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению и заданному начальному условию.*

Р е ш е н и е: Представим задачу в эквивалентной форме в виде одного соотношения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

откуда видно, что оно отображает функции $y(x)$, определенные в некоторой окрестности точки x_0, (правая часть соотношения) в тот же класс (левая часть), а задача, если обозначить правую часть как $F(y)$, сводится к решению уравнения $y = F(y)$, то есть к отысканию неподвижной точки отображения F.
Для некоторой окрестности точки x_0 $U(x_0)$ (размеры окрестности уточним позже) введем ту же метрику, что и в примере (**??**), и рассмотрим соотношение между метриками соответствующих элементов при осуществлении процесса итерации.

$$\rho(Fy_1, Fy_2) = \max_{x \in U(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \right| \le$$

$$\le \max_{x \in U(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} C|y_1(t) - y_2(t)|dt \right| \le C \cdot |x_1 - x_0| \cdot \rho(y_1, y_2).$$

При достаточно малой окрестности (чтобы было бы $|x - x_0| < \frac{1}{2C}$)

$$\rho(Fy_1, Fy_2) \le \frac{1}{2}\rho(y_1, y_2),$$

то есть отображение сжимающее (с $q = 1/2$). А поскольку пространство непрерывных на $[x_0, x]$ функций полное (см. пример (**??**)), то отображение имеет одну и только одну неподвижную точку, то есть обсуждаемая задача Коши имеет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0.

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 1.11. *Доказать, что два различных базиса одного и того же пространства имеют одинаковое число элементов.*

Пример 1.12. *Может ли отношение* $\frac{|x|}{1+|x|}$ *служить метрикой в пространстве действительных чисел* $\mathbb{R}$*?*

Пример 1.13. *Доказать, что объединение* $\bigcup\limits_i X_i \quad (i = 1,..,n)$ *конечного числа множеств* X_i*, каждое из которых замкнуто в* P*, также замкнуто в* P*.*

Пример 1.14. *Показать, что пересечение* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$ *конечного числа множеств* X_i*, открытых в* M*, является множеством, открытым в* M*.*

Р е ш е н и е: Открытость множества означает, что у любой его точки существует окрестность, все точки которой тоже входят в множество. Пусть x - произвольный элемент пересечения. Он входит во все X_i. В каждом X_i у него существует шар $B(x, \delta_i)$, целиком входящий в X_i. Шар $B(x, \min\limits_i \delta_i)$ принадлежит всем X_i, то есть их пересечению, что и говорит об его открытости.

Пример 1.15. *Пусть в некотором пространстве* M *введена метрика* $\rho(x, y) = m$*; при этом* M *становится метрическим пространством* $\big(M, m\big)$*. Будет ли* m^2 *тоже служить метрикой в множестве элементов* M *, то есть является ли* $\big(M, m^2\big)$ *метрическим пространством?*

Р е ш е н и е: Очевидно, что первые аксиомы метрики (с.6) для m^2 справедливы. Остается проверить, что при $\rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, b)$ с необходимостью $\rho(a, b)^2 \leq \rho(a, x)^2 + \rho(x, b)^2$.
Возведем обе части первого, данного, неравенства в квадрат. По причине неотрицательности обеих частей получим $\rho(a, b)^2 \leq \rho(a, x)^2 + \rho(x, b)^2 + 2\rho(a, x)\rho(x, b)$. Правая часть полученного неравенства отличается от правой части второго неравенства третьим (неотрицательным) слагаемым, так что справедливость второго неравенства

не очевидна. Более того, можно привести простые числовые примеры, когда из справедливости первого неравенства не следует справедливость второго ($2 < 1+1.1$, но $2^2 > 1^2+1.1^2$). Приведенные числа могут служить значениями m, например, существует треугольник с такими длинами сторон, а на плоскости геометрическое расстояние служит "естественной" мерой, так что ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Пример 1.16. *Исследовать линейность пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$ при использовании а) действительных и б) комплексных коэффициентов.*

Пример 1.17. *Ввести какую-либо метрику на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Может ли введенная метрика служить метрикой и в случае замкнутой плоскости $\bar{\mathbb{C}}$?*

Пример 1.18. *Доказать, что пересечение $\bigcap\limits_i X_i \quad (i = 1,..,n)$ конечного числа множеств X_i, каждое из которых замкнуто в P, также замкнуто в P.*

Пример 1.19. *Исследовать непрерывность отображения $Q = f(P)$, если $f(p(x)) = \max\limits_{x\in[a,b]} |p(x)|$, а P - это множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.*

Р е ш е н и е: При рассматриваемом отображении множества функций, непрерывных на $[a,b]$, в качестве нормы прообразов естественно взять $||p(x)|| = \max_{x\in[a,b]} p$, и таким образом, оказывается, что для выявления непрерывности отображения при произвольном $\varepsilon > 0$ достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Пример 1.20. *Будет ли: а) равномерно непрерывным б) непрерывным отображение $f(x) = x^2(t)$, если оно рассматривается как действующее из $C[0,1] \to C[0,1]$?*

а) [нет], б) [да]

Пример 1.21. *Пусть в некотором пространстве M введена метрика $\rho(x,y) = m$; при этом M становится метрическим пространством $\big(M,m\big)$. Может ли $\sqrt{m}$ тоже служить метрикой в множестве элементов M , то есть является ли при этом $\big(M,\sqrt{m}\big)$ метрическим пространством?*

[да]

Пример 1.22. *Исследовать непрерывность отображений-функционалов* $Q = f(P)$ *и* $Q = g(P)$, *если* $f(p(x)) = \max\limits_{x \in [a,b]} |p(x)|$, $\quad g(p(x)) = \int\limits_a^b |p(x)| dx$, *а* P *- это множество функций, непрерывных на отрезке* $[a, b]$ *(см. пример (**??**).)*

[Показать, что для $f(P)$ достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, а для $g(P)$ $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2(b-a)$.]

Глава 2

Нормированные пространства; евклидовы пространства

1 Нормированные пространства

1.1. Норма. Рассмотрим линейное пространство X, в котором можно ввести действительнозначную функцию $\mu : X \longrightarrow R$
(эту функцию $\mu(x)$ впредь будем обозначать как $\mu(x) =: ||x||$), удовлетворяющую следующим требованиям:
1) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (невырожденность)
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ (однородность; число λ может быть и комплексным)
3) $||x_1 + x_2|| \leq ||x_1|| + ||x_2||$ (неравенство треугольника)
Эту функцию называют *нормой,* а само линейное пространство X, вместе с введенной нормой, называют *линейным нормированным пространством.*

На основании 1), 2), 3) получается цепочка

$$0 = ||0|| = ||x + (-x)|| \leq ||x|| + || - x|| = ||x|| + | - 1| \cdot ||x|| = 2||x||,$$

откуда следует неотрицательность нормы.

В линейном нормированном пространстве можно ввести метрику, равную норме разности между элементами $\rho(x_1, x_2) = ||x_1 - x_2||$. Если при так введенной метрике полученное линейное нормированное пространство оказывается полным, оно носит название *банахова,* или B-*пространства.* [1]

1.2. Норма в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим для примера пространство n-мерных векторов $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$. Естественной

[1] По имени польского математика С. Банаха (1892-1945)

нормой для него является $||\mathbf{x}|| = |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, геометрически выражающей (для $n = 1, 2, 3$) длину радиуса-вектора с заданными координатами. Выполнение требований нормы следует из установленных правил действий с векторами и известного неравенства Минковского[2]. В некоторых случаях для пространства $\mathbb{R}^n$ более удобным оказывается использование других норм, например,

$$(1.1)\quad ||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ \text{ или } \ ||\mathbf{x}||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \ \text{ или } \ ||\mathbf{x}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Доказательство того, что аксиомы нормы в этом случае не нарушаются, основано на том же неравенстве Минковского

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} b_i^p} \quad p = 1, 2, .., \ a_i, b_i \ge 0.$$

При $p = 2$, как уже отмечено, норма равна длине вектора. Использование индекса "∞" в последней из приведенных норм объясняется тем, что $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \lim\limits_{p\to\infty} M \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} (|x_i|/M)^p} = M$ (символом M здесь обозначено максимальное среди всех координат значение $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i| = M$)

Пример 1.1. *Изобразите на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ геометрические места точек, определяемые неравенством $||\mathbf{x}|| \le \mathbf{1}$, если в пространстве X, совпадающем с плоскостью x_1Ox_2 $(X = x_1Ox_2)$, норма задана с помощью формул* $1) ||\mathbf{x}||_1 = \sum\limits_{i=1}^{2} |x_i|$,

2) $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt[2]{\sum\limits_{i=1}^{2} |x_i|^2}$, *3)* $||\mathbf{x}||_\infty = \max\limits_{1\le i\le 2} |x_i|$.

Р е ш е н и е: Как это следует из выражений (4.2), границами соответствующих замкнутых фигур в рассматриваемом случае служат линии

1) $|x_1| + |x_2| = 1$ ("повернутый" квадрат),
2) $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (окружность),
3) $|x_1| = 1 \wedge x_2 \le 1 \cup |x_2| = 1 \wedge x_1 \le 1$ (квадрат со стороной 2).

[2]Г. Минковский (1864-1909) - немецкий математик.

Границы изображены на рис. 1. Фигуры представляют собой шары $B(0,1)$ при различных способах метризации пространства $R \times R$. Таким образом, "шары" эти геометрически могут иметь достаточно причудливый вид.

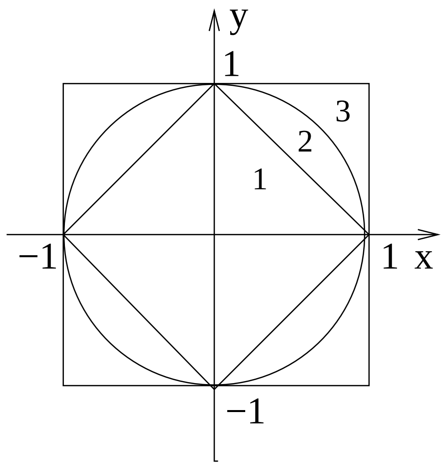

Рис. 1

Как и при вводе метрики, для одного и того же множества элементов введенные разными способами нормы создают (вместе с этим множеством) разные нормированные пространства. Иногда (если это несущественно либо очевидно из контекста) способ введения нормы не конкретизируется. Всевозможные нормы для одного и того же пространства называют *эквивалентными* между собой, если для каждой пары их $||x||^*$ и $||x||^{**}$ (x - произвольный элемент пространства) существуют такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что

$$c_1 \cdot ||x||^* < ||x||^{**} < c_2 \cdot ||x||^*$$

Поскольку $c_1 \neq 0 \neq c_2$, из этой пары неравенств следуют аналогичные неравенства и по отношению к $||x||^*$. Существенным свойством эквивалентных норм, следующим из определения, оказывается их одновременное стремление к нулю по одной и той же базе.

При изучении $\mathbb{R}^n$ отмечалось, что любой элемент его (вектор) может быть представлен как линейная комбинация со скалярными множителями особого набора из n принадлежащих $\mathbb{R}^n$ элементов, называемого базисом. Базис определяется неоднозначно, но число n элементов в нем неизменно. Пространство, обладающее подобным свойством, называется *конечномерным, n-мерным.* Размерность базиса n равна максимально возможному числу линейно независимых элементов рассматриваемого пространства. Если количество таких элементов неограничено (бесконечно), пространство называется *бесконечномерным.*

Пример конечномерного пространства - множество всех многочленов степени не выше n. Его размерность $n+1$, по числу определяющих многочлен коэффициентов. Множество всех многочленов бесконечномерно.

Теорема 1.1. *Все нормы конечномерного линейного пространства эквивалентны.*

$\Diamond$ В пространстве существует базис $e_1, e_2, ..e_n$, по которому единственным образом разлагается любой элемент пространства $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. В общем случае про элементы базиса e_i можно утверждать, что их нормы положительны $||e_i|| > 0$. При любом выборе нормы их можно пронормировать и на единицу, то есть всегда возможен выбор базиса с $||e_i|| = 1$. Докажем, что любая норма пространства эквивалентна квадратичной норме $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2}$, а значит, все нормы эквивалентны между собой. Элементы будем считать ненулевыми, так как для нулевого элемента соответствующие утверждения очевидны.

Действительно, $|x_i| \le \sqrt{x_1^2 + ...x_n^2} = ||x||_2$, откуда $||x|| = ||x_1e_1 + ... + x_ne_n|| \le |x_1| \cdot ||e_1|| + ... + |x_n| \cdot ||e_n|| \le (||e_1 + ... + ||e_n||)||x||_2 = c_2||x||_2$. $(c_2 > 0)$.

Докажем существование такого $c_1 > 0$, что $||x|| \ge c_1||x||_2$. Элементы будем считать ненулевыми, так как для нулевого элемента соответствующие утверждения очевидны. Считаем, что $||e_i||_2 = 1$. Обозначим произвольную рассматриваемую норму $||x||$ как $f(x)$. Это действительнозначная функция; ее непрерывность следует хотя бы из второго утверждения неравенства треугольника. Совокупность элементов (векторов) единичной длины, то есть тех, для которых $||x||_2 = 1$, образуют единичную сферу, представляющую собой компакт, на котором непрерывная вещественнозначная функция принимает экстремальные значения. Пусть минимум $f(x)$ достигается в точке x_0 $(f(x_0) = c_1 > 0)$. При произвольном x $\frac{x}{||x||_2}$ принадлежит единичной сфере, так как $\left|\left|\frac{x}{||x||_2}\right|\right|_2 = \frac{1}{||x||_2}||x||_2 = 1$. Для этих элементов любая норма, как показано, не меньше c_1, тогда для произвольного элемента

$$||x|| = \left|\left| ||x||_2 \frac{x}{||x||_2} \right|\right| = \left|\left| \frac{x}{||x||_2} \right|\right| \cdot ||x||_2 \geq c_1 ||x||_2 \qquad \Diamond$$

1.3. Линейные операторы; норма оператора, свойства. Рассмотрим линейный оператор A, ставящий каждому элементу множества $D(A)$ линейного пространства X некоторый элемент из того же X или из другого линейного пространства Y $y = A(x)$ $(x \in D(A) \subseteq X.)$ Множество прообразов $D(A)$ называют областью определения, а множество образов $R(A) \subseteq Y$ - областью значений. Под линейностью оператора, как обычно, понимается выполнение свойств:
1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$,
2) $A(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot A(x)$.

Для линейного оператора любая линейная комбинация, входящая в $R(A)$, может быть получена как образ соответствующей комбинации из $D(A)$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

Таким образом, область значений линейного оператора $R(A)$ представляет собой, как и $D(A)$, линейное пространство.

(Заметим для дальнейшего, что применение оператора A к элементу x обозначается не только как $A(x)$, но и как Ax. Последнее обозначение особенно распространено для линейных операторов.)

Примерами таких операторов могут служить:

Пример 1.2. *Оператор отображения множества m-мерных векторов-столбцов в n-мерные векторы-столбцы, задаваемый матрицей преобразования a_{ij} $(i = 1, ..n;\ j = 1, ..m)$ порядка $n \times m$.*

Все свойства линейности этого оператора проверялись при его определении.

Пример 1.3. *Известный n-мерный оператор Лапласа (сумма вторых производных) $\Delta U = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$, действующий в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций.*

Зачастую рассматривается так называемое расширение первоначально заданного оператора. Если $D(A) \subset D(\tilde{A})$, а оператор $D(\tilde{A})$ таков, что для любого $x \in D(A)$ имеем $Ax = \tilde{A}x$, то $\tilde{A}$ называется *расширением оператора* A. В предыдущих примерах поэтому, независимо от $D(A)$, мы можем считать операторы заданными в $R^m = X$

и $C^2(\Omega^n) = X$ соответственно.

Независимо от природы элементов из X, к классу линейных операторов надо отнести тождественный оператор E, ставящий в соответствие любому элементу его самого ($E(x) = x$), нулевой оператор, каждому элементу ставящий в соответствие нулевой элемент ($A(x) \equiv 0$,) оператор подобия ($A(x) = \lambda x$.) (Выполнение требований линейности проверяется непосредственно.)

С линейными операторами допустимы действия, в результате которых получаем новые линейные операторы, действующие в том же пространстве.

1) *Сложение операторов.* Для известных операторов A и B их сумма $C := A + B$ определяется из соотношения

$$Cx = (A + B)x := Ax + Bx$$

2) *Умножение оператора на скаляр.* При действительном или комплексном числеλ $C = \lambda A$ означает, что

$$\lambda(Ax) =: (\lambda A)x = Cx.$$

При таком определении рассматриваемое множество линейных операторов становится линейным пространством. Обычно в нем вводится еще

3) *Умножение оператора на оператор.* Произведение $C = AB$ определяется условием

$$Cx = ABx := A(Bx).$$

При этом выполнение закона коммутативности не считаетсч обязательным, и часто $ABx \neq BAx$.

Умножение позволяет определить оператор, обратный оператору A (его обозначают как A^{-1}) из соотношений $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (Под E, как обычно, понимается тождественный оператор, отображающий любой элемент x в него же $Ex = x$). Ясно, что $E^{-1} = E$. Существование обратного оператора в общем случае требует дополнительного обоснования. Например, у нулевого оператора обратного не существует.

Норму в пространстве операторов, действующих в линейном нормированном пространстве X, со значениями в линейном же нормированном Y обычно вводят следующим образом.

Применим оператор A к тем элементам множества X, норма которых не превосходит 1, и проследим за нормой получаемых образов. Точную верхнюю грань получаемых значений (допустимо и бесконечное значение верхней грани) и назовем нормой оператора A, то есть

$$(1.2) \qquad ||A|| := \sup_{||x||\leq 1} ||y|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||$$

В случае отображения $X \to R \quad ||A|| := \sup\limits_{||x||=1} |Ax|$.

Если норма оператора имеет конечное значение, он называется *ограниченным.* Определение непрерывности ничем не отличается от определения в общем случае.

Однако в случае линейного оператора непрерывность его оказывается эквивалентной с ограниченностью

Теорема 1.2. *Пусть линейный оператор A отображает линейное пространство X в банахово пространство Y . Тогда A непрерывен в том и только в том случае, если он ограничен.*

$\Diamond$ Необходимость докажем от противного. Пусть A непрерывен, но не ограничен. Тогда среди элементов с единичной нормой найдется такая последовательность $x_n \quad (||x_n|| = 1)$, что $||Ax_n|| \geq n$. На основе найденной последовательности введем $x_n^* = \frac{1}{n}x_n$ Для нее $||x_n^*|| = \frac{1}{n} \cdot ||x_n|| = 1/n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow ||Ax_n^*|| \to 0$ (в силу непрерывности.) Это противоречит тому, что $||Ax_n^*|| = \frac{1}{n}||Ax_n|| \geq 1$

Достаточность ограниченности $||A||$ для непрерывности оператора следует из неравенства $||Ax_n|| \leq ||A|| \cdot ||x_n||$, откуда видно, что при $||x_n|| \to 0 \qquad ||Ax_n||$ также стремится к 0, что и означает непрерывность оператора. $\Diamond$

(Несколько иное по форме доказательство приводится на стр. **??**).

При введенном определении, если каждый из двух операторов A и B имеет конечную норму, их сумма $A + B$ тоже имеет конечную норму и удовлетворяет соотношению (при преобразованиях используется известная линейность)

$$||A + B|| = \sup_{||x||\leq 1} ||(A + B)x|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax + Bx|| \leq$$

$$\leq \sup_{||x||\leq 1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq \sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| + \sup_{||x||\leq 1} ||Bx|| = ||A|| + ||B||,$$

то есть сумма $A + B$ остается оператором ограниченным.

Одновременно ограниченным остается и оператор λA, поскольку

$$||\lambda A|| = \sup_{||x||\le 1} ||\lambda Ax|| = \sup_{||x||\le 1} |\lambda|\cdot||Ax|| = |\lambda| \sup_{||x||\le 1} ||Ax|| = |\lambda|\,||Ax||.$$

Из определения, ввиду неотрицательности $||A||$,
$||A|| = 0 \Longrightarrow ||Ax|| = 0 \Longrightarrow ||x|| = 0 \Longrightarrow x = 0$
Тот же вывод справедлив и для $||x|| \ge 1$, так как $\left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax|| \le$ $||A||$. Из последнего неравенства заключаем также:

$$||Ax|| \le ||A||\cdot||x||.$$

Если пространства X и Y $(Ax = y;\ x \in X,\ y \in Y)$ имеют разные нормы, нормы в выкладках могут быть снабжены соответствующими индексами.

Таким образом, подпространство ограниченных операторов составляет линейное пространство.

Пример 1.4. *В качестве пространства X рассмотрим множество непрерывных на $[a,b]$ функций, то есть $X = C[a,b]$ с нормой $||f(t)|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, и определенный на X линейный оператор $Af = \int\limits_a^b f(t)dt$ $(b > a)$ с нормой $||Af|| = |Af|$. Найти норму оператора A т.е. $||A||$.*

Р е ш е н и е: При использованных нормах $||x|| = ||f(t)||$, $||Af|| = \left|\int\limits_a^b f\,dt\right| \le \int\limits_a^b |f|dt \le |f_{max}|\cdot(b-a)$, откуда $\sup\limits_{||f||\le 1} ||Ax|| = ||A|| = b - a$.

В некоторых руководствах используются другие, эквивалентные (1.2), определения нормы:

$$||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax|| \quad \text{или} \quad ||A|| := \sup_{0\ne x\in X} \frac{||Ax||}{||x||}. \tag{1.3}$$

Докажем, что (1.4) следуют из (1.2).

◊ Действительно, с одной стороны $\sup\limits_{||x||=1} ||Ax|| \le \sup\limits_{||x||\le 1} ||Ax||$, поскольку сужение множества может привести только к уменьшению верхней грани на нем. С другой, рассматривая элемент $\frac{x}{||x||}$ $(\frac{x}{||x||} \in X)$ для $0 < ||x|| \le 1$, получаем

$$\left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax|| \ge ||Ax||$$

С учетом того, что $\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1,$ из этого неравенства следует, что

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| \geq \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||.$$

Отсюда справедлива первая половина (1.4)

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||.$$

Далее, те же заключения можно переписать в форме

$$\sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\neq 0} \left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \sup_{0\neq x\in X} \frac{||Ax||}{||x||} = ||A|| \quad \Diamond$$

В пространстве $n-$мерных векторов любое их линейное преобразование задается матрицей размерности $n\times n$. Длина вектора-образа $A\bar{\mathbf{x}}$ при этом есть непрерывная функция его координат, которые, в свою очередь являются непрерывными функциями координат исходного вектора-прообраза $\bar{\mathbf{x}}$. Оператор преобразования при этом непрерывен и, следовательно, ограничен. При бесконечномерном базисе, например, в пространстве $X = l_2$, когда преобразование задается матрицей бесконечной размерности, линейный оператор может оказаться неограниченным.
Полезное неравенство $||Ax|| \leq ||A||\cdot||x||$ следует при этом из второй половины (1.4). В выкладках с нормой оператора часто используют также утверждение примера (4.9) (с.38).
Если пространства X и Y $(Ax = y;\ x \in X,\ y \in Y)$ имеют разные нормы, нормы в выкладках могут быть снабжены соответствующими индексами.

Таким образом, подпространство ограниченных операторов составляет линейное пространство.

Пример 1.5. *В качестве пространства X рассмотрим множество непрерывных на $[a,b]$ функций, то есть* $X = C[a,b]$ *с нормой* $||f(t)|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$, *и определенный на X линейный оператор* $Af = \int\limits_a^b f(t)dt \quad (b > a)$ *с нормой* $||Af|| = |Af|$. *Найти норму оператора A т.е.* $||A||$.

Р е ш е н и е: При использованных нормах $||x|| = ||f(t)||, \quad ||Af|| = \left|\int\limits_a^b f\,dt\right| \leq \int\limits_a^b |f|dt \leq |f_{max}| \cdot (b-a)$, откуда $\sup\limits_{||f||\leq 1} ||Ax|| = ||A|| = b - a$.

В некоторых руководствах используются другие, эквивалентные (1.2), определения нормы:

$$(1.4) \qquad ||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax|| \quad \text{или} \quad ||A|| := \sup_{0\neq x\in X} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

Докажем, что (1.4) следуют из (1.2).

$\diamondsuit$ Действительно, с одной стороны $\sup\limits_{||x||=1} ||Ax|| \leq \sup\limits_{||x||\leq 1} ||Ax||$, поскольку сужение множества может привести только к уменьшению верхней грани на нем. С другой, рассматривая элемент $\frac{x}{||x||}$ ($\frac{x}{||x||} \in X$) для $0 < ||x|| \leq 1$, получаем

$$\left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax|| \geq ||Ax||$$

С учетом того, что $\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1$, из этого неравенства следует, что

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| \geq \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||.$$

Отсюда справедлива первая половина (1.4)

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||.$$

Далее, те же заключения можно переписать в форме

$$\sup_{||x||\leq 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\neq 0} \left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \sup_{0\neq x\in X} \frac{||Ax||}{||x||} = ||A|| \quad \diamondsuit$$

В пространстве $n-$мерных векторов любое их линейное преобразование задается матрицей размерности $n\times n$. Длина вектора-образа $A\bar{\mathbf{x}}$ при этом есть непрерывная функция его координат, которые, в свою очередь являются непрерывными функциями координат исходного вектора-прообраза $\bar{\mathbf{x}}$. Оператор преобразования при этом непрерывен и, следовательно, ограничен. При бесконечномерном базисе, например, в пространстве $X = l_2$, когда преобразование задается матрицей бесконечной размерности, линейный оператор может оказаться неограниченным.

Полезное неравенство $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$ следует при этом из второй половины (1.4). В выкладках с нормой оператора часто используют также утверждение примера (4.9) (с.38).

Тот же вывод справедлив и для $||x|| \geq 1,$ так как $\left|\left|A\frac{x}{||x||}\right|\right| = \frac{1}{||x||}||Ax|| \leq ||A||$. Из последнего неравенства заключаем также:

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||.$$

1.4. Полунорма. В определении нормы изменим одну из аксиом, оставляя остальные без изменения, а именно, аксиому невырожденности примем в виде $||x|| = 0 \;\Leftarrow\; x = 0$, то есть допускается, что равную нулю норму могут иметь и не равные нулю элементы. Остальные аксиомы оставим без изменения. Величину $||x||$, определяемую новой системой аксиом для элемента x, назовем его *полунормой.* Пространство с введенной таким образом полунормой называется *полунормированным.* Нормированное пространство одновременно можно считать и полунормировнннным. Для обозначения полунормы обычно используется та же символика, что и для нормы, поскольку оба понятия не применяются в одном контексте. Структуры и свойства полунормированных и нормированных пространств отличаются друг от друга, особенно в том, что касается сходимости последовательностей (по норме или полунорме). Например, в нормированном пространстве предельная функция, к которой по норме сходится последовательность отображений $f_n(x)$, единственна, а при сходимости по полунорме - не обязательно.

2 Евклидовы пространства

Линейное пространство называют *евклидовым,*[3] если в нем определено *скалярное произведение* элементов, удовлетворяющее в случае действительного пространства следующей системе условий:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$,
3) $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$; при этом $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ только для $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

[3]По имени Евклида. жившего якобы в III в. до нашей эры; считается, что труды его были восстановлены в средние века.

Из 1-3 следует дистрибутивность и по отношению ко второму элементу скалярного произведения, и по отношению к линейной комбинации конечного числа элементов.

Так определенное скалярное произведение дает возможность ввести в евклидовом пространстве норму с помощью соотношения

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Справедливо *неравенство Коши-Буняковского*[4]

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||. \tag{2.1}$$

$\lozenge$ Действительно, рассмотрим $(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}, \alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})$ неотрицательный по условию 4), откуда $\alpha^2(\mathbf{x},\mathbf{x}) + \mathbf{2}\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) = \alpha^{\mathbf{2}}||\mathbf{x}||^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||^{\mathbf{2}}$. Из неотрицательности квадратного трехчлена при произвольных α следует отрицательность дискриминанта $4(\mathbf{x},\mathbf{y})^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}||\mathbf{x}||^{\mathbf{2}} \cdot ||\mathbf{y}||^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{0}$, что и доказывает неравенство. $\lozenge$

Выполнение аксиом нормы (стр. 24) 1) и 2) (невырожденности и однородности) при этом очевидно, а неравенство треугольника выводится из неравенства Коши-Буняковского. При этом рассматриваются действительные коэффициенты и действительнозначные элементы.

Скалярное произведение непрерывно, то есть из $\varphi_n \to \varphi$ и $\psi_m \to \psi$ следует $\lim\limits_{n,m\to\infty}(\varphi_n\psi_m) = (\varphi\psi)$. (Доказательство в общем комплекснозначном случае на стр.**??**)

В векторных пространствах $R \times R$ и R^3 скалярное произведение было связано с геометрическими характеристиками векторов, а для его вычисления в координатной форме необходимо было найти сумму произведений одноименных координат, для которой выполнялись все аксиомы скалярного произведения. Ясно, что аналогично можно ввести скалярное произведение в случае $n-$мерных векторов $(\bar{a}, \bar{b}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.

В пространстве функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[\alpha, \beta]$, ввести скалярное произведение двух функций (обе $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[\alpha, \beta]$) можно по формуле $(f,g) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)\ dt$. Выполнение всех требований (с.33) обеспечивается при этом свойствами интеграла.

---

[4] О.Коши(1789-1857) - французский математик;
В.Я.Буняковский(1804-1889) - русский математик

3 Гильбертовы пространства

Дополнительно к понятию евклидова пространства, когда множитель α аксиомы 3) (с.33) предполагаются действительнозначными, рассмотрим случай возможных комплексных значений, заменив одновременно первое из системы требований, определяющих скалярное произведение, на следующее:
1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$,
Полученное пространство со скалярным произведением называют обычно *унитарным.* Норму и метрику для него определим по тем же формулам, что и для евклидова пространства. Заметим, что в унитарном пространстве нарушается линейность по α, поскольку $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y)$.

Если евклидово либо унитарное пространство еще и полное, его называют *гильбертовым.*[5] Гильбертово пространство принято обозначать символом $\mathbb{H}$.
Примерами гильбертовых пространств могут служить $\mathbb{R}^n$ и уже встречавшееся l_2 со скалярными произведениями $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \sum\limits_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{x_i y_i}$ и $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ соответственно.

В численных методах математического моделирования многих сложных задач их решения отыскиваются как предел получаемых в результате некоторых операций сходящихся последовательностей, состоящих из элементов разнообразных гильбертовых пространств. При этом может быть использовано особое определение сходимости, называемое *слабой* сходимостью: последовательность x_n называют слабо сходящийся к x , если $(f, x_n) \to (f, x)$ для некоторой фиксированной функции f. Тогда, в отличие от вновь введенной сходимости, сходимость в смысле с.12 называют *сильной.*

4 Ортогональный базис.

[5]Д.Гильберт(1862-1943) - немецкий математик.

Отмечалось, что по максимально возможному числу линейно независимых элементов линейного пространства различают пространства конечномерные и бесконечномерные. Если в том же пространстве определено скалярное произведение, то исходя из общепринятых геометрических представлений и понятий, относящихся к плоскости и трехмерному пространству, и в общем случае также вводят понятие угла между элементами и их взаимной ортогональности.

Элементы x и y пространства P с введенном в нем скалярным произведением (x, y) называются *ортогональными,* если $(x, y) = 0$. Система функций называется *ортогональной,* если попарно ортогональны все ее элементы. Базис, представляющий собой ортогональную систему, называется ортогональным. Очевидно, что все его элементы ненулевые (в силу независимости), и поэтому $(x, x) \neq 0$. Если в ортогональной системе норма пространства введена с помощью скалярного произведения как $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, то после деления каждого элемента базиса на $||x||$ приходим к *ортонормированному* базису, удовлетворяющему соотношениям

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij} = 1$ при одинаковых индексах и обращается в 0 для $i \neq j$. Наибольший интерес при этом ортогональный базис представляет в случае бесконечномерности.

При рассмотрении пары функций $\varphi(x), \psi(x)$, интегрируемых на множестве X, при скалярном произведении, определенном с помощью $(\varphi, \psi) := \int\limits_X f(x)g(x)\ dx$, свойство их быть ортогональными, естественно, зависит не только от них самих, но и от множества, по которому они интегрируются. В предыдущих курсах при изучении тригонометрических рядов Фурье показывалось, например, что бесконечная система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...\}$ ортогональна на любом отрезке длиной 2π, но она же не ортогональна на других отрезках.

Если нормы функций ортогональной системы исходно не равны 1, разделив каждую функцию на ее норму (ни интегрируемость, ни ортогональность при этом не нарушатся), получим систему ортонормированную. Для вышеприведенной тригонометрической системы соответствующая ортонормированная система имеет вид
$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x ...\}$
Известна так называемая процедура ортогонализации, позволяющая получать ортонормированную систему $\{\psi_i\}$, исходя из любого линейно независимого набора функций $\{\varphi_i\}$. Можно проверить, что

соответствующие формулы последовательного вычисления ψ_i имеют вид:

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1}{||\varphi_1||} \qquad \psi_n = \frac{\varphi_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1}(\varphi_n\psi_i)\psi_i}{||\varphi_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1}(\varphi_n\psi_i)\psi_i||} \qquad (n = 2, 3, ..)$$

Ни один знаменатель здесь не может обратиться в 0 в силу линейной независимости системы $\{\varphi_n\}$.

При изучении общих вопросов и решении конкретных задач часто применяются следующие ортогональные на $[-1, 1]$ многочлены. Многочлены Лежандра, [6] определяемые соотношениями

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (n = 0, 1, ...)$$

Доказательство их ортогональности может быть проделано в качестве упражнения. В приведенном виде они не ортонормированы, норма каждого из них равна $\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. Первые многочлены равны $P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x.$
Многочлены Чебышева [7]

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n(\arccos x); \quad T_0 = 1$$

Эти многочлены обладают тем свойством, что они *ортогональны с весом:* $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)T_k(x)dx = 0$ при $n \neq k$.
Произвольный многочлен $n-$го порядка допускает представление в виде линейной комбинации начальных (до $n-$ой степени) многочленов приведенных либо других ортогональных семейств.
Свойства ортогональных базисов в гильбертовых пространствах общего вида подробнее рассматриваются в главе 7 (с.**??** и далее).

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 4.1. *В нормированном пространстве с нормой* $||x||$ *метрика ("расстояние" между* x *и* y*) введена следующим образом* $\rho(x, y) = ||x - y||$. *Показать, что при этом* $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$ *и* $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$.

[6] А.Лежандр (1752-1833) - французский математик.
[7] П.Л.Чебышев (1821-1894) - русский математик и механик.

Пример 4.2. *Проверьте выполнение аксиом нормы для* $||x|| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$, *если* $x(t) \in C^1[a,b]$.

Пример 4.3. *Определите нормы операторов* A_i*: нулевого* ($A_1x \equiv 0$), *тождественного* ($A_2x \equiv x$), *и оператора подобия* ($A_3x = \lambda x$) *(при комплексном коэффициенте* λ.*)*

Пример 4.4. *Вычислите нормы вектора* $\bar{\mathbf{a}} = (1,2,3)$ *в пространстве* $\mathbb{R}^3$, *определяя* $||\cdot||$ *по формулам (4.2) страницы 24.*

Пример 4.5. *Докажите, что нормы в* $\mathbb{R}^3$, *определенные по формулам (4.2), эквивалентны между собой.*

Пример 4.6. *Покажите, что в пространстве комплекснозначных столбцов* $c = (c_i) \quad (i = 1,..m,\ c_i \in C)$ *норму можно ввести по формулам* $a)\ ||c|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}|c_i|^2} \qquad b)\ ||c|| = \max\limits_{1\le i\le m}|c_i|$

Пример 4.7. *Пусть* P_0 *- пространство стремящихся к 0 последовательностей с элементами* $x = (x_1, x_2, ..) \quad (x_n \in \mathbb{R},\ x_n \to 0)$. *Может ли нормой этого пространства служить* $||x|| = \max_i|x_i|$? *Или* $||x|| = \max_i|x_i| + 1$?

Пример 4.8. *Найти норму оператора* $Ax = \int\limits_0^1 tx(t)\ dt$, *если* $x(t) \in C^{(1)}[0,1]$ *(имеет непрерывную производную на единичном отрезке),* $x(0) = 0$, *а норма элемента* $||x||$ *определяется по формуле* $||x|| = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$.

Р е ш е н и е: Обозначим максимальные значения функции и ее производной на отрезке $[0,1]$ как M и M_1 соответственно (экстремумы достигаются в силу непрерывности). По теореме о среднем, $x(t) = \int\limits_0^t f'(\xi)d\xi \Rightarrow max|x(t)| = max\left|\int\limits_0^t f'(\xi)d\xi\right| \le \int\limits_0^1 |f'(\xi)|d\xi \le \int\limits_0^1 M_1 d\xi$,

то есть $M \le M_1$. Одновременно $\max_{x\in[0,1]}|Ax| = \max_{x\in[0,1]}\left|\int\limits_0^1 tx(t)\ dt\right| = \frac{M}{2}$, откуда $\sup\limits_{x\in[0,1]}\frac{\max_{x\in[0,1]}|Ax|}{||x||} = 1/2$.

Пример 4.9. *Докажите, что в случае отображений, удовлетворяющих соотношению* $||Ax|| < c||x||$ *для любого элемента* $x \in X, \quad ||A|| = \inf\{c : ||Ax|| < c||x||, \forall x \in X\}$.

Р е ш е н и е: При указанном исходном ограничении фигурирующие в нем постоянные $c > 0$ и поэтому имеют конечную нижнюю грань. Обозначим ее как $c_0 \quad (c \geq c_0)$. Для c_0 выполняется исходное ограничение $||Ax|| < c_0||x||$, (иначе существовал бы элемент, для которого оно неверно), и фактически $c_0 = min\{c : ||Ax|| \leq c||x||,\ x \in X\}$. Отсюда $||Ax||/||x|| \leq c_0$, то есть

$$\sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \leq c_0 \Longrightarrow c_0 = ||A||.$$

Пример 4.10. *Сходятся ли по норме ("естественной",* $||f|| = \max_{x \in [0,1]} f(x)$ *) в пространстве* $C[0,1]$ *последовательности*
$a)\ f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad b)\ \varphi_n = x^n - x^{2n}$?

$a)$ [да] $\quad b)$ [нет]

Пример 4.11. *Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на* $[a,b]$ *функций принять за норму элемента* $x(t)$ *выражение* $\quad \alpha)\ ||x|| = |x(a)| + |x'(a)| + ||x''||$,
$\beta)\ ||x|| = |x(a)| + |x'(b)| + ||x''||$, *где за норму* $||x''||$ *принято* $||x''|| = \max_{t \in [a,b]} x''(t)$*?*

$\alpha)$ [да] $\quad \beta)$ [да]

Пример 4.12. *Показать, что в комплекснозначном пространстве* l_2 *(см. с.9) скалярное произведение элементов* (x, y) *можно определить по формуле* $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$*, где индексом* i *помечены координаты каждого из элементов.*

Р е ш е н и е: Ряд, выражающий скалярное произведение, сходится абсолютно, поскольку из принадлежности $x, y \in l_2$ следует сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\bar{y}_i|^2$, а $2\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i \bar{y}_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\bar{y}_i|^2$. В справедливости требований скалярного произведения (с. 33) убеждаемся предельным переходом в верных соотношениях для конечного n при $n \to \infty$.

Пример 4.13. *Докажите, что если* φ_α *и* φ_β *элементы ортонормированной системы, то при* $\alpha \neq \beta \quad ||\varphi_\alpha - \varphi_\beta|| = \sqrt{2}$.

Пример 4.14. *Проверить ортогональность и ортонормированность систем* $\{1, \cos x, \cos 2x, ...\}$, $\{\sin x, \sin 2x, ...\}$ *на отрезке* $[0, \pi]$. *[ортогональны обе, не ортонормированы]*

Пример 4.15. *Найти 4 первых многочлена из системы многочленов, ортогональных на отрезке* $[0, 1]$, *применив процесс ортогонализации к последовательным степеням* x^k *(с.6) (нормировка не обязательна).*

Р е ш е н и е: Применим формулу последовательного вычисления ψ_n (с.37), опуская нормировку

$$\psi_1 = \varphi_1 \qquad \psi_n = \varphi_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n \psi_i)\psi_i \qquad (n = 2, 3, ..)$$

По ней $\quad \psi_1 = 1, \qquad \psi_2 = x - 1 \cdot \int\limits_0^1 1 \cdot x \, dx = x - 1/2.$

Последовательно $\quad \psi_3 = x^2 - \int\limits_0^1 1 \cdot x^2 \, dx - (x - 1/2) \int\limits_0^1 (x - 1/2) \cdot x^2 \, dx =$ $x^2 - x/3 - 1/6 \quad$ и $\quad \psi_4 = x^3 - \int\limits_0^1 1 \cdot x^3 \, dx - (x - 1/2) \int\limits_0^1 (x - 1/2) \cdot x^3 \, dx -$ $(x^2 - x + 1/6) \int\limits_0^1 (x^2 - x + 1/6) \cdot x^3 = x^3 - x^2/120 - x/15 - 77/360.$

Можно убедиться, что все полученные многочлены с последовательно возрастающими степенями попарно ортогональны на отрезке $[0, 1]$. Для получения ортонормированной системы каждый из них надо поделить на $\sqrt{\int\limits_0^1 \psi_n^2 \, dx} \quad (n = 2, 3, 4).$

Глава 3

Линейные функционалы и обобщенные функции

1 Линейный функционал

Определение 1.1. *Линейным функционалом назовем отображение линейного нормированного пространства X в множество действительных чисел R ($F: X \to R$).*

В качестве пространства прообразов X рассмотрим для примера множество $C([a,b])$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Простейшим функционалом в этом случае может служить множество значений функций из $C([a,b])$ в какой-либо фиксированной точке отрезка $[a,b]$, в частности, $f(a)$, то есть $F(f(x)) = f(a)$. Линейность отображения при этом очевидна.

Линейное отображение (функционал) для того же X можно также задать посредством интеграла $F(f(x)) = \int\limits_a^b f(x)dx$ или даже $F(f(x)) = \int\limits_a^b f^n(x)dx$. (Особенно часто используют квадратичный функционал $F(f(x)) = \int\limits_a^b f^2(x)dx$.)

Поскольку линейный функционал представляет собой частный случай линейного оператора, для него используются те же понятия (норма, ограниченность, непрерывность и т.д.) и справедливы те же свойства; в частности, эквивалентность ограниченности и непрерывности. Множество линейных функционалов, определенных на X, образует линейное пространство X^*, которое называют *сопряженным* с X.

Теорема 1.1. *Значение каждого функционала F, определенного на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ выражается в виде* *некоторого скалярного произведения* $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = F$, *где* $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Доказательство этого утверждения проведено на с.**??**

2 Обобщенные функции

Пусть областью определения линейного функционала служит некоторое множество D, состоящее из функций $\varphi \in D$, называемое пространством основных функций, для которого имеет смысл понятие сходимости функциональных последовательностей.

Определение 2.1. *Обобщенной функцией назовем заданный на D непрерывный линейный функционал.*

Таким образом, обобщенная функция задает отображение $f : D \to R$ (или $f : D \to C$). Обозначается оно не только как $f(\varphi)$, но и как (f, φ), что связано, в частности, с предыдущим утверждением (1.1).

Множеством основных функций D могут служить, по этому определению, многие классы функций, однако наибольшее практическое применение нашел класс финитных [1] функций, имеющих непрерывные производные всех порядков. Схематично график одной из основных функций представлен на рис. 1 .

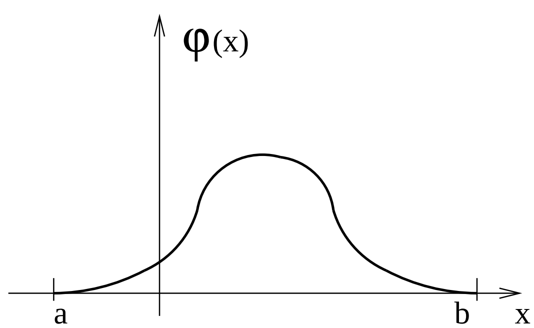

Рис. 1

Будем рассматривать функции, имеющие ненулевой общий носитель, а сходимость определим следующим образом: последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов из D назовем сходящейся к функции $\varphi \in D$, если на указанном интервале все производные $\varphi_n^{(k)}$ (включая $\varphi_n^{(0)}$, то

[1] Финитная функция отлична от 0 на конечном интервале действительной оси и равна 0 вне него; интервал этот называют носителем и обозначают $supp\ f$.

есть саму функцию) равномерно сходятся к $\varphi^{(k)}$. При этом не предполагается равномерной сходимости по различным k. Можно проверить, что эти функции образуют линейное пространство. Впредь будем называть его D.

Пример 2.1. *Рассмотрим следующую последовательность*
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n} e^{-\frac{1}{(x^2-a^2)}}, & \text{если } |x| < a \\ 0, & \text{если } |x| \geq a. \end{cases}$$

По заданию, все ее функции финитные с одним носителем $supp\ \varphi_n = (-a, a)$. *Любая функция в точках* $x \in supp\, \varphi_n$ *бесконечное число раз дифференцируема, как и вне интервала* $(-a, a)$, *где все ее производные тождественно равны 0. Проверку дифференцируемости в точках* $x = \pm a$ *необходимо провести непосредственно по определению производной. Правосторонняя* $\varphi'(a) = 0$. *Левосторонняя* $\varphi'(a) = \lim\limits_{x \to a-0} (0 - \frac{n+1}{n} e^{-\frac{1}{(x^2-a^2)}}) = 0$, *что и доказывает дифференцируемость в* $x = a$. *Аналогичные выкладки проводятся для* $x = -a$ *и производных* $\varphi^{(k)}$ *любого порядка.*

Приведенное в предыдущем примере множество функций может служить пространством D основных функций (иногда их называют еще *пробными*). По определению, если $\varphi \in D$, она бесконечно дифференцируема и ее производные любого порядка также принадлежат пространству D.

Пусть $f(x)$ - функция, интегрируемая на некотором интервале $[a, b]$. Порождаемый ею непрерывный линейный функционал, то есть обобщенную функцию, определяем следующим образом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\varphi(x)dx =: (f, \varphi) =: F(f).$$

Очевидно, что функционал этот линеен и непрерывен по $\varphi \in D$. Непрерывность понимается в том смысле, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$.(Локально интегрируемая функция, рассматриваемая как обобщенная, называется *регулярной обобщенной* функцией. Отображение $f(x)$ в пространство F определяет локально интегрируемую функцию f как обобщенную функцию, обозначаемую как (f, φ) или $F(f)$.)

Приведенные интегралы не исчерпывают класса непрерывных линейных функционалов, связанных с D. К тому же классу, например, относится и $\varphi(0)$ $(\varphi \in D)$. Обозначим этот функционал как $\varphi(0) =: (\delta, \varphi)$ Можно показать, что среди локально интегрируемых функций нет такой, чтобы она порождала приведенный линейный функционал. Функция, обозначенная как δ, к регулярным не относится. Их называют *сингулярными.*Хотя обобщенную функцию часто обозначают как $f(x)$, запись эта носит чисто условный характер, поскольку значение "истинно обобщенной", сингулярной, функции нельзя определить ни в одной точке оси, хотя про δ-функцию, например, и говорят иногда, что она равна нулю во всех точках, кроме нуля. Как и для регулярных обобщенных функций, для сингулярной δ используют то же обозначение, совпадающее по виду со скалярным произведением на бесконечном интервале $\varphi(0) = (\delta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$.

Пример 2.2. *Показать, что среди локально интегрируемых функций не существует функции, удовлетворяющей соотношению* $\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$, *то есть* $\delta-$*функция не относится к регулярным.*

Р е ш е н и е: В качестве φ возьмем предельную функцию примера (2.1), с.43; Тогда $\varphi(0) = e^{\frac{1}{a^2}} > 0$ и $\varphi(0) > \varphi(x)$. Если искомая функция $\delta(x)$ носит регулярный характер, обозначив ее $\delta(x) = f(x)$, имеем с одной стороны,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = e^{\frac{1}{a^2}}, \tag{2.1}$$

с другой стороны, $\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int\limits_{-a}^{a} f(x)\varphi(x)dx\right| \leq e^{\frac{1}{a^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Правая часть неравенства, в силу локальной интегрируемости $f(x)$, стремится к нулю при $a \to 0$, так что равенство (2.1) невозможно.

Пространство обобщенных функций также линейно, его обозначают как D'. Сходимость в нем означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \big((f_n, \varphi)\big) = (f, \varphi)$.

Рассмотрим локально интегрируемые на отрезке $[0, 1]$ так называемые $\delta-$образные функции (рис. 2)

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{если } x \notin [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

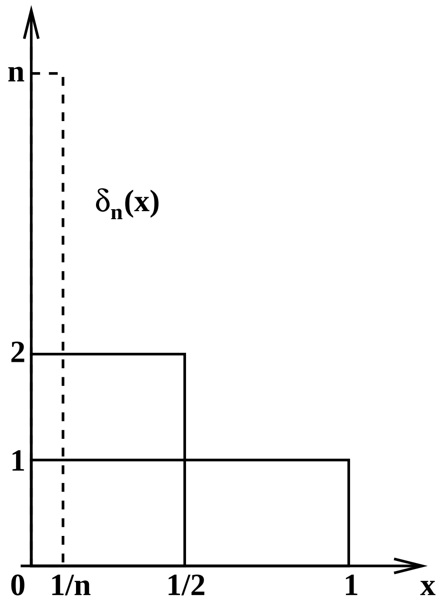

Рис. 2

и порожденные ими обобщенные функции (δ_n, φ). Очевидно, что (при оценке интеграла можно использовать теорему о среднем)

$$\lim_{n\to\infty}(\delta_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{1/n} n\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(\delta_n, \varphi) = (\delta, \varphi)$, или $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = \delta$.
Таким образом, сингулярная обобщенная функция представляет собой предел последовательности регулярных функций (локально интегрируемых, рассматриваемых как обобщенные).
Эти соотношения объясняют широко распространенное представление о $\delta(x)$ как о “функции, равной 0 всюду, кроме $x = 0$, где она равна ∞, но так, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$.”

Будем говорить, что обобщенная функция f равна 0 на интервале (a, b), если:

1)$(f,\varphi)=0$ для всех $\varphi\in D$ и для них же 2)$supp\,\varphi\subset(a,b)$.
При этом равенство $f_1=f_2$ понимается как $f_1-f_2=0$.
Действия с обобщенными функциями. По отношению к обобщенным функциям как к линейным функционалам операции вводятся таким образом, чтобы это не противоречило обычным правилам, если в качестве обобщенных рассматриваются регулярные функции. Поэтому $\big((f_1+f_2),\varphi\big)=(f_1,\varphi)+(f_2,\varphi)$.
Для регулярной бесконечно дифференцируемой функции $\alpha(x)$ произведение ее на обобщенную, исходя из $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x)f(x)\varphi(x)dx=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\alpha(x)\varphi(x)dx$, определяется по формуле

$$(\alpha f,\varphi)=(f,\alpha\varphi)$$

Ясно, что $\alpha\varphi\in D$.
Произведение обобщенных функций друг на друга не определяется. Можно показать, что попытка сохранить и в этом случае привычные правила действий с регулярными функциями приводит к нарушению непрерывности.

Если $f(x)$ непрерывно дифференцируемая функция, производную от нее как от обобщенной регулярной естественно определить по формуле $(f',\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx$, что после интегрирования по частям с учетом финитности $\varphi(x)$ дает $(f',\varphi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)dx=$ $-(f,\varphi')$. Эта формула принимается за производную от функционала, определяющего обобщенную функцию

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi')\quad \varphi\in D \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что у любой обобщенной функция существуют производная, которая выражается также в виде обобщенной функции (поскольку $\varphi'(x)\in D)$), а посему дифференцировать исходную функцию можно бесконечное число раз.

По методу математической индукции показывается, что

$$(\delta^{(n)},\varphi)=(-1)^n\varphi^{(n)}(0).$$

Пример 2.3. *Рассмотрим функцию Хевисайда*[2] *- функцию единичного скачка, - играющую важную роль в операционном исчислении* $\sigma_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \le 0 \\ 1, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$
Функция разрывна в $x = 0$ *и, естественно, в этой точке недифференцируема в классическом смысле этого понятия. Однако* $\sigma_0(x)$ *суммируема на любом конечном интервале, включающем в себя* $x = 0$, *и на нее можно смотреть как на регулярную обобщенную функцию, имеющую производные всех порядков. Найти производную от* $\sigma_0(x)$ *в смысле теории обобщенных функций.*

Р е ш е н и е: Обобщенная функция Хевисайда задается как $\big(\sigma_0(x), \varphi(x)\big) \quad (\varphi \in D)$. Тогда производная от нее находится из соотношения $(\sigma_0', \varphi) := -(\sigma_0, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_0(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx =$ $\varphi(0)$, то есть $(\sigma_0', \varphi) = \varphi(0) = (\delta, \varphi) \ (\varphi \in D)$. Таким образом, $\sigma_0' = \delta$. Хотя обобщенные функции не определяются поточечно, полученное значение не противоречит "традиционным производным" в тех точках, где производная существует: условно говоря, $\delta-$функция равна нулю во всех ненулевых точках, а для участков постоянства $\sigma_0(x)$ $0' = 1' = 0$.

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 2.4. *Доказать, используя метод математической индукции, что* $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

Р е ш е н и е: Как уже было показано, при $n = 0$ (для самой функции δ) и при $n = 1$ доказываемая формула справедлива. Пусть она верна для $n = k$. Тогда $\big((\delta^{(k)})', \varphi\big) =$ [по определению производной]$=-(\delta^{(k)}, \varphi')$=[по предположению индукции]=
$= -(-1)^k(\varphi')^{(k)}(0) = (-1)^{(k+1)}\varphi^{(k+1)}(0)$, что выражает доказываемую формулу для $n = k + 1$.

Пример 2.5. *Продифференцировать обобщенную функцию, порожденную функцией* $y = |x|$.

Р е ш е н и е: Обобщенная функция, порожденная заданной интегрируемой на любом конечном интервале функцией $y = |x|$,

[2] О.Хевисайд (1850-1925) - английский физик и инженер.

дифференцируема, а ее производная представляет собой обобщенную функцию, которая на всех множествах, где существует классическая производная y', совпадает с обобщенной функцией, порождаемой этой производной ($y' = -1$ при $x < 0$ и $y' = 1$ при $x > 0$.) Искомая производная равна $(|x|', \varphi) = -(|x|, \varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\varphi' dx =$ $-\lim\limits_{\eta\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\eta}(-x)\varphi' dx + \int\limits_{-\eta}^{+\eta}|x|\varphi' dx + \int\limits_{+\eta}^{+\infty} x\varphi' dx\right) = \int\limits_{-\infty}^{0} x\varphi' dx - \int\limits_{0}^{+\infty} x\varphi' dx =$ [средний интеграл равен 0 в силу ограниченности подынтегральной функции] $= x\cdot\varphi\Big|_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi dx - x\cdot\varphi\Big|_{0}^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty}\varphi dx =$ [φ обращается в 0 в точках $x = \pm\infty$ вследствие финитности] $= \int\limits_{-\infty}^{0}(-1)\varphi dx +$ $\int\limits_{0}^{+\infty}(+1)\varphi dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} sign\, x\; \varphi\; dx = (sign\, x, \varphi)$, то есть в смысле обобщенных функций $|x|' = sign\, x$.

Пример 2.6. *Пусть $f \in D$ и $g \in D$ - обобщенные функции, а α и β - скалярные коэффициенты. Доказать, что $\big(\alpha f + \beta g\big)' = \alpha f' + \beta g'$.*

Пример 2.7. *Найти производную функции*

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}, \text{ в пространстве } D'.$$

Глава 4

Суммируемые функции, интеграл Лебега

1 Интеграл Лебега

Определение интеграла Лебега.[1] Впредь будем предполагать, что рассматриваемые функции и множества, на которых они заданы, измеримы. В интересующем нас случае числовых множеств мера будет отождествляться с длиной, площадью и т.д. Построение интеграла Лебега проведем следующим образом. (Конструкция его во многом аналогична построению введенного в предшествующих курсах интеграла Римана с тем существенным отличием, что ранее мы "группировали", объединяли в одно слагаемое интегральной суммы точки, имевшие близкие значения аргументов, а теперь будем объединять их по принципу близости самих значений функции.)

Начнем с функций, которые назовем простыми, а именно, с функций, имеющих не более счетного числа конечных значений $y_1, y_2, \ldots$. По предположению измеримости, измеримо каждое множество $A_i = \{x : f(x) = y_i\}$, на котором функция принимает i-ое значение.

Определение 1.1. *Простая функция называется суммируемой на множестве* $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, *если ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty} y_i \mu(A_i)$ *абсолютно сходится. При сходимости сумма ряда называется интегралом от* f *по множеству* A *и обозначается как* $\int\limits_A f(x) d\mu$.

Значения y_i предполагаются разными, хотя это и не имеет принципиального характера, поскольку в случае абсолютной сходимости возможно суммирование слагаемых с одинаковыми значениями и запись их в виде одного слагаемого. Если значений конечное число, ряд вырождается в конечную сумму; x - это элементы A.

[1] А.Лебег (1875-1941) - французский математик.

Очевидно, что простые суммируемые функции обладают свойством:

$$\int\limits_A (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu = \alpha \int\limits_A f(x)d\mu + \beta \int\limits_A g(x)d\mu.$$

А если ограниченная на A функция $|f| \le M$ суммируема, то $\left|\int\limits_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A)$.
На основе определения интеграла Лебега для простых функций определим интеграл Лебега в общем виде

Определение 1.2. *Функция $f(x)$ называется суммируемой на A, если существует последовательность простых суммируемых на A функций $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся на A к $f(x)$. В этом случае существующий $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu$ назовем интегралом Лебега по множеству A от функции $f(x)$ и обозначим*

$$\int\limits_A f(x)d\mu := \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_n(x)d\mu.$$

(Напомним, что при равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ возможен переход к пределу под знаком интеграла.)

Для простых функций новое определение совпадает с (1.1), что очевидно, если взять $f_n \equiv f$ для всех n.

Существование предельного значения для любой равномерно сходящейся последовательности и его независимость от выбора самой последовательности следует из того, что $\left|\int\limits_A f_n d\mu - \int\limits_A f_m d\mu\right| < \mu(A) \cdot \sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ в силу равномерной сходимости, а сходимости к разным пределам быть не может, потому что если бы интегралы от двух последовательностей, каждая из которых сходится к $f(x)$, имели бы разные пределы, объединение этих двух последовательностей предела бы не имело, хотя и представляло бы собой равномерно сходящуюся последовательность.

Свойства интеграла Лебега. Перечислим основные свойства интеграла Лебега. Все они с очевидностью следуют из определения (1.2) и свойств интегралов от простых функций. Многие из них повторяют соответствующие свойства интеграла Римана.

(1) $\int\limits_A 1 \cdot d\mu = \mu(A)$.

(2) $\alpha \int\limits_A f(x) d\mu = \int\limits_A \alpha f(x) d\mu \quad (\alpha = const)$.

(3) $\int\limits_A (f(x) + g(x)) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu + \int\limits_A g(x) d\mu$

(4) Ограниченная на множестве A функция $f(x)$ интегрируема на A. (Несправедливо для интеграла Римана. Пример - функция Дирихле.)

(5) Интеграл от неотрицательной функции, если он существует, неотрицателен:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_A f(x) d\mu \geq 0, \text{ откуда из } f \geq g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_A f(x) d\mu \geq \int\limits_A g(x) d\mu \text{ и из } m \leq f(x) \leq M \text{ почти всюду на} A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\mu(A) \leq \int\limits_A f(x) d\mu \leq M\mu(A).$$

(6) При $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int\limits_A f(x) d\mu = 0$.

(7) Из $f(x) = g(x)$ почти всюду $\Rightarrow \int\limits_A f(x) d\mu = \int\limits_A g(x) d\mu$ либо оба интеграла не существуют.

(8) Если $\varphi(x) \geq |f(x)|$ почти всюду и $\varphi(x)$ интегрируема, то $\int\limits_A f(x) d\mu$ существует.

(9) Интегралы $\int\limits_A f(x) d\mu$ и $\int\limits_A |f(x)| d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

Пример 1.1. *Доказать свойство (8).*

Р е ш е н и е:

В дальнейшем все интегралы будем понимать в смысле интегралов Лебега. Рассматривая в одномерном интеграле Лебега переменный верхний предел $\int\limits_a^{\mathbf{x}} f(x) d\mu$, представим интеграл как функцию $x : \int\limits_a^{\mathbf{x}} f(t) dt = F(x)$. Так же, как и для интеграла Римана, при этом оказывается, что $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ почти всюду.

Сравнение интегралов Римана и Лебега. Ограничимся одномерными интегралами. Наиболее общее утверждение заключается в том, что

Теорема 1.1. *Если существует интеграл* $I_R = \int\limits_a^b f(x)dx$ *по Риману, то существует и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)d\mu = I_L$ *по Лебегу и* $I_R = I_L$.

Не проводя детального доказательства, отметим, что существующий, по предположению, I_R равен пределу нижних и верхних сумм Дарбу при любом выборе разбиений, в частности, при равномерных разбиениях 2^n точками. В то же время две простые функции, значения которых на "регулярных" отрезках разбиения совпадают с соответствующими значениями из нижней и верхней сумм Дарбу, стремятся на них к значениям $f(x)$ при $n \to \infty$, а интегральные суммы в пределе дают I_L, равный I_R. На "нерегулярных" отрезках, где значения нижней или верхней сумм не определены, простым функциям можно приписать любые значения, что в конечном итоге не скажется на предельном значении интегральной суммы, поскольку счетное число таких отрезков имеет нулевую меру. Таким образом, для собственных интегралов интегрируемости по Риману достаточно для интегрируемости по Лебегу. Но это условие не необходимо. Например, функция Дирихле (0 в иррациональных точках и 1 в рациональных), неинтегрируемая на [0,1] в смысле Римана, интегрируема по Лебегу. В одномерных интегралах будем отождествлять $d\mu$ и dx, в двумерных интегралах $d\mu$ - это элемент площади ds и т.д.
Иная ситуация в случае интегралов несобственных. Имеющаяся здесь неопределенность иллюстрируется двумя примерами:
$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ условно сходится по Риману, но не существует как интеграл Лебега,
$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ по Риману сходится (интеграл Дирихле, равный $\frac{\pi}{2}$,) но по Лебегу он смысла не имеет, поскольку "римановский" $\int\limits_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ расходится, а в смысле Лебега условная и абсолютная сходимость эквивалентны.

Интегрируемые по Лебегу функции обычно называют *суммируемыми.*

2 Пространство L_1.

Определение. Рассмотрим метрическое пространство X, например, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с естественной мерой в нем или его часть, и множество функций, суммируемых на X по Лебегу. Поскольку линейная комбинация таких функций остается суммируемой, они образуют линейное пространство. Нормируем его, введя $||f|| = \int\limits_X |f(x)|d\mu$. Через μ в общем случае здесь обозначена мера в X. В нашем простейшем случае $d\mu = dx$. Важно отметить, что под элементом f мы понимаем целый класс эквивалентных, то есть совпадающих почти всюду, функций. В этих условиях предлагаемая норма, действительно, обладает всеми свойствами нормы, в том числе и тем, что $||f|| = 0 \Longrightarrow f = 0$, где f, может быть и не равно 0, но не более, чем на множестве меры 0. Расстояние между элементами f и g определим по формуле $\rho(f,g) = ||f-g||$. Введенное нормированное линейное пространство называют обычно L_1. При необходимости уточнить множество X и использованную метрику пишут $L_1(X,\mu)$. Сходимость по указанной метрике называют *сходимостью в среднем.*

Теорема 2.1. *Пространство L_1 полно.*

$\Diamond$ Действительно, в произвольной фундаментальной последовательности можно всегда указать такие возрастающие номера, что для определяемой ими подпоследовательности выражающие норму разности интегралы $\int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|d\mu$ будут меньше любых $\varepsilon > 0$, в качестве которых возьмем члены сходящегося ряда $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. По признаку Вейерштрасса это обеспечивает абсолютную сходимость почти всюду ряда $f_{n_1} + |f_{n_2} - f_{n_1} + ...$ к некоторой функции $f(x)$, равной пределу выбранной подпоследовательности, а значит, и начальной последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f(x)$. При этом в неравенстве $\int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|d\mu < \varepsilon$ под знаком интеграла можно перейти к пределу по одному индексу $(n_{k+1} \to \infty)$. Полученное соотношение

$\int |f - f_{n_k}| d\mu < \varepsilon$ показывает, что предельная функция принадлежит тому же пространству $f(x) \in L_1$. Таким образом, пространство L_1 нормированное, полное, т.е. банахово. $\Diamond$

Теорема 2.2. *Множество всех непрерывных функций всюду плотно в* $L_1(\mathbb{R}, \mu)$.

Банахово (полное и нормированное) пространство L_1 не является евклидовым, поскольку норму элементов в нем нельзя представить в виде скалярного произведения. Проверим, например, выполнение равенства параллелограмма для двух функций, интегрируемых на отрезке $[0, 2\pi]$: $f_1(x) \equiv 1$ и $f_2(x) = \sin x$. Непосредственное интегрирование показывает, что $||1 + \sin x||^2 + ||1 - \sin x||^2 \neq 2||1||^2 + 2||\sin x||^2$, поскольку левая часть, по определению нормы в L_1, равна $\left(\int\limits_0^{2\pi} |1 + \sin x| dx\right)^2 + \left(\int\limits_0^{2\pi} |1 - \sin x| dx\right)^2 = 4\pi^2$, а правая - $4\pi^2 + 2\int\limits_0^{2\pi} |\sin x|^2 dx$.

3 Пространство L_2.

Рассмотрим множество функций, квадрат которых интегрируем в смысле Лебега на некотором X (может, и не одномерном), то есть тех, для которых $\int\limits_X f(x) d\mu < \infty$. Как обычно, символом $f(x)$ здесь обозначено целое семейство функций эквивалентных, то есть отличающихся друг от друга не более, чем на множестве меры нуль. Отметим некоторые свойства функций из L_2. Пусть обе функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу L_2. Тогда (все утверждения опираются на свойства интеграла Лебега).

(1) Произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на том же множестве X (что следует из неравенства $|f \cdot g| \le 1/2(f^2 + g^2)$) и как следствие каждая функция интегрируема (для доказательства интегрируемости f достаточно взять $g(x) \equiv 1$).

(2) $\big(f(x) + g(x)\big) \in L_2$. Справедливость утверждения следует из того, что $(f+g)^2 \le f^2 + 2|f \cdot g| + g^2$, а правая часть интегрируема как сумма трех интегрируемых слагаемых.

(3) Функция $\alpha \cdot f(x) \in L_2$, поскольку $\int\limits_X |\alpha f|^2 d\mu = \alpha^2 \int\limits_X f^2 d\mu$.

Эти свойства означают, что L_2 представляет собой линейное пространство. Введем в нем скалярное произведение стандартным способом

$$(3.1)\qquad (f,g)=\int\limits_X f(x)\cdot g(x)\,d\mu$$

Уточним, что определение (3.1) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к скалярному произведению лишь в случае действительнозначных функций и при $\alpha\in\mathbb{R}$. При использовании комплекснозначных величин надо видоизменить определение скалярного произведения, что и сделано далее (см. с.**??**).

Таким образом, L_2 - это евклидово пространство, для которого справедливы и неравенство треугольника, и неравенство Коши-Буняковского, имеющее вид

$$\Big(\int\limits_X f(x)g(x)d\mu\Big)^2\le\int\limits_X f^2(x)d\mu\cdot\int\limits_X g^2(x)d\mu.$$

Из него, в частности, следует оценка при конечномерном X и $g(x)\equiv 1$

$$\Big(\int\limits_X f(x)d\mu\Big)^2\le\mu(X)\int\limits_X f^2(x)d\mu.$$

Поскольку норма в L_2 определяется как $||f||=\sqrt{(f,f)}$, за расстояние между f и g примем $\rho(f,g)=||f-g||$. Его квадрат $\int\limits_X(f-g)^2d\mu$ называют также среднеквадратичным уклонением f и g друг от друга и по аналогичной величине оценивают сходимость последовательности f_n к f : $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в среднем квадратичном на* X*, если* $\int\limits_X\big(f_n(x)-f(x)\big)^2d\mu\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Теорема 3.1. *Пространство* L_2 *полно.*

$\Diamond$ По приведенной оценке, для фундаментальной последовательности $\{f_i\}$ справедливо:

$$\int\limits_X|f_n(x)-f_k(x)|d\mu\le\sqrt{|\mu(X)|\cdot\int\limits_X(f_n(x)-f_k(x))^2d\mu}\le\varepsilon|\mu(X)|^{1/2},$$

то есть $\{f_i\}$ остается фундаментальной и в метрике L_1. Можно повторить рассуждения предыдущего доказательства (теор. 2.1), получить для некоторой подпоследовательности из $\{f_i\}$ $\int\limits_X(f_{i_m}-f_{i_l})^2d\mu<$

ε, и далее перейти под интегралом к пределу при $i_l \to \infty$. В силу сходимости к $f(x)$ в среднем выбранной подпоследовательности, так же сходится к f и фундаментальная последовательность $\{f_i\}$. (Заметим, что в первом неравенстве доказательства фактически утверждается также, что если функция $f \in L_2$ на X, то она же принадлежит классу L_1 на том же множестве. Требование конечности $\mu(X) < \infty$ оказывается существенным.) $\Diamond$

Пример 3.1. *Проверить, принадлежат ли функции* $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *и* $\psi(x) = \frac{1}{1+x}$ *классам* L_1 *и* L_2*, если* X *– это положительная полуось* $(0, +\infty)$.

Р е ш е н и е: Для проверки необходимо вычислить интегралы $\int\limits_0^\infty |f(x)|dx$ и $\int\limits_0^\infty f^2(x)dx$ для обеих функций. В случае $\varphi(x)$ оба интеграла сходятся, поскольку $\varphi(x) < \frac{1}{x^2}$, имеющего конечное значение; $\varphi(x)$ принадлежит обоим пространствам.
Аналогичное рассмотрение для ψ показывает, что $\psi \in L_2$, но $\psi \notin L_1$, поскольку $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ расходится ($\frac{1}{1+x} \sim \frac{1}{x}$).

Замечание 1. Для определенности, пусть $X \in R$. Если исходно сузить класс рассматриваемых функций пространством непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$ (или из $C^p[a, b]$) и ввести нормы, аналогичные тем, что были использованы при построении L_1 и L_2, $||f||_p = \sqrt[p]{\int\limits_X |f(x)|^p d\mu}$, полученные пространства (в том числе и при $p = 1, 2$), в отличие от L_1 и L_2, не являются полными, (поскольку предел последовательности непрерывных функций не обязательно непрерывен), а значит, и не относятся к гильбертовым. Пополнения каждого из полученных пространств приводят к пространствам полным: $L_1, L_2, \ldots$ и т.д. L_2 при этом оказывается гильбертовым со скалярным произведением (3.1).

Замечание 2. Скалярное произведение можно ввести не по (3.1), а по формуле

$$(f, g) = \int\limits_X (f(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x))\, d\mu, \tag{3.2}$$

где наряду с “классическими” производными используются и так называемые обобщенные производные как результат некоторого предельного процесса для последовательностей функций. На основе (3.2) рассматривают гильбертово пространство $\mathbb{H}_1$, называемое пространством Соболева.

4 Пространства L_1 и L_2 (обобщения)

При обосновании справедливости утверждений в предыдущих разделах часто мы опирались на конечность меры исходного множества прообразов X. На множествах бесконечной меры часть промежуточных или окончательных утверждений становится несправедливой, а часть можно обосновать и для $\mu(X) = \infty$.

Например, при $\mu(X) = \infty$ несправедливым становится утверждение о том, что если функция $f(x) \in L_2$, она автоматически является элементом и L_1. Пример тому приводится в (3.1). В этих же условиях сходимость последовательности $f_n(x)$ в L_2 не влечет за собой обязательной сходимости в L_1. Например, последовательность функций на действительной оси $(\mu(R) = \infty)$

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при} \quad |x| \leq n \\ 0 & \text{при} \quad |x| > n \end{cases} \tag{4.1}$$

сходится в L_2 оставаясь расходящейся в L_1, что следует из сходимости и расходимости соответствующих рядов.

Пространства L_1 и L_2 полны и при $\mu(X) < \infty$, что было доказано в (2.1) и (3.1), и при $\mu(X) = \infty$. Конечность меры в доказательстве (2.1) никак не использовалась, так что эта часть утверждения уже доказана.

Основная идея доказательства при $\mu(X) = \infty$ заключается в том, что все пространство X представляется в виде объединения счетного числа непересекающихся подмножеств с конечной мерой каждое $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$. (Возможность этого предусматривается общей теорией меры.) Любая фундаментальная последовательность $\{f_n\}$ задает фундаментальную последовательность на каждом из X_n (сужение исходной последовательности). Для произвольного $\varepsilon > 0$, по критерию Коши, для достаточно больших m, k

$$\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{X_n} (f_m(x) - f_k(x))^2 d\mu < \varepsilon \tag{4.2}$$

На каждом X_n функции с интегрируемым квадратом образуют полное пространство. В неравенстве (4.2) перейдем сперва к пределу при $k \to \infty$, а затем при $N \to \infty$. Получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{X_n} (f_m(x) - f(x))^2 d\mu \leq \varepsilon$. (В скобках стоят сужения соответствующих функций на каждое из X_n.) Полученное неравенство можно переписать в виде

$$\int\limits_{X} (f_n(x) - f(x))^2 d\mu \leq \varepsilon,$$

из чего следует и сходимость $\{f_n\}$ к $f(x)$, и принадлежность $f(x)$ к классу L_2, то есть полнота его.

Практически без изменения все изложенное переносится на комплексные функции комплексного переменного и так же строится комплекснозначное пространство L_2 функций с интегрируемым квадратом, если существует $\int\limits_X |f(x)|^2 d\mu$. Чтобы получить гильбертово пространство L_2, скалярное произведение в этом случае определяется по формуле $(f, g) = \int\limits_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$. Подробнее многие относящиеся к L_2 вопросы обсуждаются позже (см. с. **??**,**??** и далее). Важные результаты при этом основаны на существованиии в L_2 (как действительном, так и комплексном) базиса и в возможности разложения любого элемента по ортогональному базису.

И L_1, и L_2 пространства нормированные, в каждом определена сходимость по его норме для функциональных последовательностей: в среднем квадратичном в L_2 и в среднем в L_1. Как соотносятся эти виды сходимости между собой, с равномерной сходимостью на множестве X и со сходимостью почти всюду для него? Ответ на вопрос зависит также и от меры X: конечна ли она, либо $\mu(X) = \infty$.

Наиболее стройная “иерархия” выстраивается в случае $\mu(X) < \infty$. Самый “строгий, жесткий” вид сходимости при этом - равномерная на множестве X. Из нее следуют все другие виды сходимости.

Справедливы утверждения:

- последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, равномерно сходящаяся на X, сходится в метрике $L_2(X,\mu)$, среднеквадратически. (Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ для достаточно больших номеров $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, откуда $\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^2 d\mu < \varepsilon^2 \cdot \mu(X)$.)
- последовательность, сходящаяся в метрике L_2, сходится и в метрике L_1. (поскольку $\int\limits_X ||f_n(x) - f(x)|d\mu \leq \sqrt{\mu(X) \cdot \int\limits_X (f_n(x) - f(x))^2}$.)
- если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем (в L_1), то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_i}(x)\}$, сходящуюся почти всюду (было доказано во время доказательства полноты L_1.) то же и для равномерно сходящейся последовательности
- если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на X, из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_i}(x)\}$, сходящуюся почти всюду на X.

Обратные и "перекрестные" утверждения несправедливы. Рассмотрим, например, последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{при} \quad x \in (0, \frac{1}{n}] \\ \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (0, \frac{1}{n}] \end{cases} \tag{4.3}$$

Она сходится к 0 не только почти всюду, но и всюду на отрезке $[0,1]$. Но ни равномерной сходимости, ни сходимости в среднем либо среднеквадратичном нет, поскольку $\int\limits_{[0,1]} f_n(x)d\mu = \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 1$. Вместе с тем существуют сходящиеся в среднем либо среднем квадратичном последовательности, вообще не сходящиеся ни в одной точке (см. пример 4.1).

Пример 4.1. *Рассмотрим последовательность* $\{f_i(x)\}$, *заданную на отрезке* $[0,1]$ *следующим образом. Возьмем* $f_1(x) \equiv 1$ *на всем отрезке. На втором этапе задания последовательности разделим* $[0,1]$ *на две равные части и примем*

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 0 & \text{при} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} ; \; f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ 1 & \text{при} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

и т.д. На $n-$*ом этапе разделим* $[0,1]$ *на* n *равных частей и примем*

очередные n функций последовательности f_{i_k}, $k = 1, 2..n$ равными 1 на $k-$ом участке деления и 0 на всей оставшейся части $[0,1]$. Продолжим процесс неограниченно.
Исследовать получившуюся последовательность на сходимость, на сходимость в среднем и на сходимость в среднеквадратичном.
Р е ш е н и е: В любой фиксированной точке x^* одна из функций с последовательными номерами, соответствующими $n-$му этапу построения, равна 1, а остальные равны 0. Таким образом, члены последовательности принимают значение 1 однажды в каждой последовательной "серии" из n номеров, а длины "серии" при $i \to \infty$ неограниченно увеличиваются. Последовательность не сходится ни в одной точке.
Одновременно $\int\limits_{[0,1]} |f_{i_k}| d\mu = \int\limits_{[\Delta_n]} |f_{i_k}| d\mu = \int\limits_{[\Delta_n]} |f_{i_k}|^2 d\mu = |\Delta_n| = 1/n$, что меньше произвольного $\varepsilon > 0$ для достаточно больших номеров, то есть построенная последовательность сходится и в среднем, и в среднеквадратичном.

ПРИМЕР 4.2. *Пусть множество всех линейных операторов $Ax : X \to Y$ (норма $||A||$ не предполагается конечной) обозначено как $\mathfrak{L}(X,Y)$, а $L(X,Y)$ - это те его элементы, норма которых конечна $||A|| < \infty$. Показать, что $L(X,Y)$ тоже представляет собой нормированное линейное пространство с нормой $||A||$.*

Р е ш е н и е: Нужно показать, что $||A||_{\mathfrak{L}}$ служит нормой и в пространстве $L(X,Y)$ и что при произвольных коэффициентах линейная комбинация любых двух элементов из $L(X,Y)$ принадлежит $L(X,Y)$, то есть имеет ограниченную норму.

В самом деле, если операторы $A, B \in L$, то $||A+B|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||Ax+ Bx|| \le \sup\limits_{||x|| \le 1} \left(||Ax|| + ||Bx||\right) \le \sup\limits_{||x|| \le 1} ||Ax|| + \sup\limits_{||x|| \le 1} ||Bx|| = ||A|| + ||B||$, что является величиной ограниченной, поскольку норма каждого оператора как элемента L ограничена.
Так же: $||\mu A|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||\mu Ax|| = \sup\limits_{||x|| \le 1} |\mu| \cdot ||Ax|| = |\mu| \cdot ||A|| < +\infty$. На основании доказанных соотношений любая $(\alpha A + \beta B) \in L(X,Y)$.
Из определения нормы как верхней грани по элементам, чья собственная норма не превышает единицы, видно, что для них $||A|| \ge 0$ и если $||A|| = 0$, то $||Ax|| = 0$. То же верно и для элементов с $||x|| > 1$, потому что мы можем рассмотреть $\frac{x}{||x||}$ с нормой $\left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1$, так что

можно использовать предыдущий результат. Из $A\left(\frac{x}{||x||}\right) = 0$ следует, что $Ax = 0$, то есть $||A||_{\mathfrak{L}}$, действительно, норма в L.

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 4.3. *Исследовать последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{при} \quad |x| \le n \\ 0 & \text{при} \quad |x| > n \end{cases}$$

на сходимость, на равномерную сходимость, на сходимость в среднем и на сходимость в среднеквадратичном на отрезке $[a, b]$ и на всей оси Ox.

Пример 4.4. *Исследовать последовательность*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{при} \quad x \le 1 \\ x/\sqrt{n} & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

на сходимость, на равномерную сходимость, на сходимость в среднем и на сходимость в среднеквадратичном на положительной полуоси $Ox \quad (0 \le x < \infty)$ и на отрезке $[0, b]$ этой полуоси.

Глава 5

Интегральные уравнения

1 Основные определения

Многие проблемы прикладной математики приводят к моделям, в которых искомая функция входит под знак интеграла. Уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла, называются интегральными. Важную роль среди них играют линейные (по отношению к искомой функции) уравнения вида (1.1)[1] и (1.2)[2]

(1.1)

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt + f(s) \quad \text{(уравнение Фредгольма II рода)}$$

(1.2)

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt + f(s) \quad \text{(уравнение Вольтерры II рода)}$$

При этом предполагается, что переменные s и t принадлежат отрезку $[a,b]$; функция $f(s)$ задана на этом отрезке, а $K(s,t)$, называемая ядром, - на соответствующем квадрате. Уравнение (1.2) можно считать частным случаем (1.1), когда ядро $K(s,t)$ равно нулю во всех точках, лежащих выше диагонали квадрата $s=t$ (для $t>s$). Тем не менее, по причине новых существенных свойств, которые не присущи уравнению (1.1), уравнение (1.2) выделяют традиционно в особый класс уравнений. Если же неизвестная функция входит лишь под знак интеграла, уравнения называются уравнениями I рода, и

[1] И. Фредгольм(1866-1927) - шведский математик.

[2] В. Вольтерра(1860-1940) - итальянский математик.

их записывают в виде:

$$(1.3)\quad f(s)=\int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \quad \text{(уравнение Фредгольма I рода)}$$

$$(1.4)\quad f(s)=\int\limits_a^s K(s,t)\varphi(t)dt \quad \text{(уравнение Вольтерры I рода)}$$

Как обычно, если $f(s)\equiv 0$, уравнения называют *однородными.*

Важную роль и при общетеоретических рассмотрениях, и при практическом решении уравнений играет возможный параметр λ - множитель при интеграле в уравнениях (1.1-1.4). При этом однородные уравнения приводят к задаче нахождения таких значений параметра, когда имеется ненулевое решение уравнения, и к отысканию самих таких функций-решений (задача о собственных значениях), а неоднородное уравнение II рода (1.1), приобретающее вид: $\varphi(s)=\lambda\int\limits_a^b K(s,t)\varphi(t)dt+f(s)$, при задании λ из различных множеств приводит к задачам с принципиально разными свойствами.

Все уравнения (1.1-1.4) имеют линейный характер и являются частным случаем более сложных нелинейных соотношений , с одним из которых мы встретились , рассматривая пример сжимающих отображений (стр. 17). Прежде чем привести пример конкретной задачи, приводящей к интегральному уравнению, отметим, что реально многие математические модели явлений и технологических процессов первоначально формулируются в терминах интегральных соотношений, а уж из них затем выводятся соответствующие дифференциальные уравнения.

Задача, приводящая к интегральному уравнению. Рассмотрим малые отклонения упругой струны с натяжением T_0 под действием силы, действующей на нее в перпендикулярном направлении. Малость отклонений предполагает малость углов, образуемых элементами струны с исходным направлением (осью Ox) и, вследствие этого, постоянство натяжения T_0 вдоль струны.

Пусть на струну длиной l, закрепленную в точках A и B оси Ox (см. рис.) в точке $x=\xi$ действует сила P_ξ, перпендикулярная начальному положению струны. Под ее воздействием струна примет форму ломаной (рис. 1) с наибольшим отклонением δ в точке $x=\xi$.

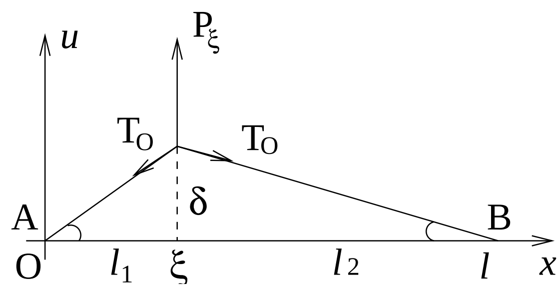

Рис. 1

Ограничимся малой по величине силой P_ξ, при которой углы отклонения нагруженной струны от положения равновесия столь малы, что их квадратами можно пренебречь, а косинусы углов, определяющие проекции натяжения на горизонтальное направление, можно считать равными 1.
$\left(\cos\alpha_i = 1 - \frac{\alpha_i^2}{2} + O(\alpha_i^4) \simeq 1 + O(\alpha_i^2);\ \sin\alpha_i \simeq \operatorname{tg}\alpha_i \simeq |\alpha_i| \simeq \frac{\delta}{l_i}\right)$
Учет равновесия вертикально действующих сил приводит к равенству

$$T_0\frac{\delta}{l_1} + T_0\frac{\delta}{l_2} = P_\xi \quad \Longrightarrow \quad T_0\frac{\delta}{\xi} + T_0\frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi,$$

откуда $\delta = \dfrac{(l-\xi)\xi}{T_0 l}P_\xi$, а отклонение $u(x)$ точек струны в переменной точке x, полученное из подобия соответствующих треугольников, имеет вид

$$(1.5) \qquad u(x) = P_\xi \cdot G(x,\xi),\ \text{где } G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} & \text{при } 0 \le x \le \xi \\ \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} & \text{при } \xi \le x \le l \end{cases}$$

При распределенной по струне непрерывной силе с линейной плотностью $p(\xi)$ разделим струну на участки Δx_i и, исходя из принципа суперпозиции, проводя стандартные рассуждения, получим для отклонения сначала интегральную сумму, а затем интеграл, выражающий результирующее отклонение

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)d\xi$$

по заданной нагрузке $p(\xi)$.

Это же соотношение позволяет сформулировать обратную задачу: найти такое распределение нагрузки $p(\xi)$ вдоль струны, при котором струна примет заданную форму $u(x)$. Для нахождения $p(\xi)$ вдоль струны нужно решить полученное интегральное уравнение Фредгольма I рода. Подобному уравнению удовлетворяют и отклонения упругих балок и крутящихся валов.

Уравнения Фредгольма с вырожденным ядром. Рассмотрим частный случай ядра $K(x,t)$, когда оно может быть представлено в виде $K(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot Q_i(t)$. Ядра этого класса называются *вырожденными.* Функции P_i $(i = 1, ...n)$ мы вправе считать линейно независимыми между собой. В случае зависимости, выразив зависимые функции как линейную комбинацию оставшихся и объединяя слагаемые с одинаковыми P_i, мы сократили бы общее число слагаемых. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к набору Q_i $(i = 1, ...n)$.

Предположим, что в уравнении (1.1) и ядро $K(x,t)$ и $f(x)$ принадлежат классу L_2 $(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dt dx < \infty \quad \int\limits_a^b |f(t)|^2 dt < \infty)$. В случае вырожденности ядра уравнение (1.1) приобретает вид

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(t)\varphi(t)dt + f(x) \tag{1.6}$$

После обозначений $\int\limits_a^b Q_i(t)\varphi(t)dt = q_i$ уравнение (1.6) (или (1.1)) перепишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b Q_i(t) \Big(\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t)\Big) dt + f(x),$$

что после обозначений $\int\limits_a^b Q_i(t)P_j(t)dt = a_{ij}$ $\int\limits_a^b Q_i(t)f(t)dt = b_i$ приводит к равенству (при известном представлении вырожденного ядра величины a_{ij} и b_i могут быть посчитаны заранее).

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i\Big) \tag{1.7}$$

Поскольку в (1.7) функции P_i линейно независимы, коэффициенты при них равны между собой, то есть

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \qquad (i = 1, .., n) \tag{1.8}$$

Таким образом, получена система линейных уравнений относительно q_i. После ее решения искомая функция $\varphi(x)$ записывается в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(x) + f(x).$$

Если q_i получены как решение (не обязательно единственное) системы (1.8), $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, поскольку все проделанные операции обратимы.

Получается, что существование и единственность решения интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром связаны с общими свойствами решения системы линейных алгебраических уравнений с матрицей системы $\left(a_{ij} - \delta_{ij} \right)$ и вектором $\left(b_i \right)$ в качестве правых частей. Невырожденность матрицы $\left(a_{ij} \right)$ гарантирует существование одного и только одного решения. При вырожденной матрице система либо несовместна (а следовательно, и интегральное уравнение решения не имеет), либо имеет множество решений. В этом последнем случае однородная система $(b_i \equiv 0)$ может иметь и ненулевые решения.

2 Теоремы фредгольма

Запишем исходное интегральное уравнение в операторной форме $\varphi = A\varphi + f$. Оператор A при этом считаем принадлежащим гильбертову пространству $\mathbb{H}$. Перенося неизвестные в левую часть равенства, получим $(E-A)\varphi = f$. Переобозначив для краткости $E-A =: T$ и рассматривая одновременно сопряженный оператор T^* и однородные уравнения, получим (определение сопряженного оператора см. на с.**??**; если отображение задано конечномерной матрицей T, то T^* - матрица, к ней транспонированная.)

$$T\varphi = f \qquad T\varphi_0 = 0 \tag{2.1}$$

$$T^*\psi = g \qquad T^*\psi_0 = 0 \tag{2.2}$$

На основании предыдущего раздела утверждается, что решения этих четырех уравнений для вырожденного ядра связаны следующим образом:

Теорема 2.1. *Неоднородное уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех правых частях f , которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения $T^*\psi_0 = 0$.*

Теорема 2.2. *Либо неоднородное уравнение $T\varphi = f$ имеет и только одно решение при любой правой части $f \in \mathbb{H}$, либо соответствующее однородное уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.* Это утверждение называют еще *альтернативой Фредгольма.*

Теорема 2.3. *Однородные уравнения $T\varphi_0 = 0$ и $T^*\psi_0 = 0$ имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решение.*

Теоремы Фредгольма, с очевидностью следующие из общей теории линейных алгебраических уравнений в случае вырожденного ядра интегрального уравнения, остаются справедливыми и для невырожденных ядер. Строгое доказательство этого утверждения основано на том факте, что любой компактный (вполне непрерывный) оператор (а для этого достаточно принадлежности K и f пространству L_2) может быть представлен как предел некоторой последовательности вырожденных операторов, так что доказательство теорем Фредгольма может быть получено в результате соответствующего предельного перехода.

3 Решение уравнений Фредгольма II и I рода.

Относительно функций, входящих в уравнение $y(x) = \int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt + f(x)$, предположим, что все они, включая искомое решение, входят в $L_2[a,b]$, либо $L_2([a,b]\times[a,b])$ то есть интегралы от их квадратов имеют конечное значение, в частности $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(s,t)|^2 ds dt = B$.

Для получения общих результатов включим в исходное уравнение параметр λ и в зависимости от него будем искать решение уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$. Применим метод последовательных приближений. В качестве начального приближения, для определенности, возьмем $y_0(x):=f(x)$.[3] Тогда $y_1(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,t)f(t)dt+f(x)$ $\quad y_2(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)\left(\lambda\int\limits_a^b K(s,t)f(t)dt+f(s)\right)ds+f(x)$. Переобозначим $y_2(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t)dt+\lambda^2\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x,s)K(s,t)f(t)dt\,ds$, то есть $y_2(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b \lambda K_2(x,t)f(t)dt$,

где $K_2(x,t)=\int\limits_a^b K_1(x,s)K_1(s,t)ds \quad (K_1(y,z)=K(y,z))$. Повторяя операцию, приходим к рекуррентной последовательности

$$y_n(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b\left(\sum_{k=1}^n\lambda^{k-1}K_k(x,t)\right)f(t)dt,$$

где $K_1(x,t)=K(x,t), \qquad K_k(x,t)=\int\limits_a^b K(x,s)K_{k-1}(s,t)ds, \quad k=2,3...$

Полученное разложение функции, с помощью которой однозначно описывается решение данного уравнения носит пока формальный характер (степенной ряд по (λ) не обязан сходиться во всей плоскости). Если λ не превышает радиуса сходимости, то ряд под интегралом в выражении для $y_n(x)$ сходится, а его сумма представляет собой так называемую *резольвенту* $R(x,t,\lambda)$, посредством которой выражается решение интегрального уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt+f(x)$.

Оценим величину λ, достаточную для гарантированной сходимостиряда для резольвенты. Для краткости и определенности положим $a=0$, $b=1$ и пределы в интегралах временно ставить не будем,

[3]По принципу сжимающих отображений, конечный результат не зависит от выбора начальной функции y_0.

хотя и будем их подразумевать. Если рассматриваемый интервал отличен от единичного, его можно привести к единичному линейным преобразованием $z = a + (b - a)x$.

Формально ряд для решения уравнения $\varphi(x)$ можно переписать в виде $\varphi(x) = f(x) + \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) + ...$,

где $\psi_1 = \int K(x,y)f(y)dy \qquad K_1(x,y) = K(x,y)$,

$\psi_2 = \int K(x,y)\psi_1(y)dy = \int K_2(x,y)f(y)dy \quad K_2(x,y) = \int K(x,z)K_1(z,y)dz$,

$\psi_3 = \int K(x,y)\psi_2(y)dy = \int K_3(x,y)f(y)dy \quad K_3(x,y) = \int K(x,z)K_2(z,y)dz$,

и т.д., или $\varphi = \lambda \int H(x,y,\lambda)f(y)dy$, где $H(x,y,\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_n(x,y)$. Из вида общего члена для $H(x,y,\lambda)$ следует, что как ряд по λ он допускает мажоранту вида $M(\lambda \cdot \sqrt{B})^n$, т.е. при $|\lambda \cdot \sqrt{B}| < 1$ сходится равномерно на $[0,1]$, так что допустимо почленное интегрирование, то есть формально записанный ряд для $\varphi(x)$, действительно, выражает единственное решение задачи.

Практически, для конкретного значения λ, алгоритм нахождения решения сводится к итерационной процедуре последовательных подстановок очередных приближений под знак интеграла в исходном уравнении.

Имеется метод (метод определителей Фредгольма), позволяющий эффективно отыскивать резольвенту не только при малых значениях λ, как в только что описанном методе.

Для уравнений Фредгольма построение решения невозможно, может быть, лишь для некоторого конечного числа значений λ - называемых собственными, - тех, для каких соответствующее однородное уравнение Фредгольма имеет и ненулевые решения. (Кстати отметим, что уравнения Вольтерры вообще собственных значений не имеют).

О численном решении интегральных уравнений. Наиболее удобным и точным методом практического нахождения решения в большинстве случаев представляется численный сеточный метод. В достаточно простой форме для уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x)$$

его можно применить следующим образом.

Введем на интервале $[a, b]$ сетку из $N+1$ точки $x = x_i$ $(i = 0, 1.., N)$, так что $a = x_0$, $b = x_N$. Чаще всего узлы сетки x_i располагаются либо равномерно (из соображений простоты обработки и интерпретации), либо в узлах многочленов Чебышева или Лежандра, что позволяет обходиться небольшим количеством узлов для достижения приемлемой точности. В элементарном численном анализе имеются квадратурные формулы, выражающие значения определенного интеграла $\int\limits_a^b y(x)dx$ в виде суммы значений в узлах интервала с известными числовыми коэффициентами типа $\int\limits_a^b y(x)dx = \sum\limits_{i=0}^N \beta_i y(x_i)$. Заменив подобным образом интегралы по s для каждого из узлов, от интегрального уравнения приходим к системе $N+1$ алгебраического линейного уравнения относительно $\varphi(x_i)$

$$\varphi(x_i) = \lambda \sum_{j=0}^N \beta_j K(x_i, s_j)\varphi(s_j) + f(x_i), \quad (i = 0, 1, ...N)$$

Решение алгебраической системы, если λ не совпадает ни с одним из собственных значений, однозначно. При $N \to \infty$ оно сходится к решению интегрального уравнения в узлах сетки по соответствующей норме: в пространстве непрерывных функций - поточечно, в L_2 - среднеквадратически. При достаточно подробной сетке получать $\varphi(x)$ как функцию непрерывного аргумента чаще всего не требуется. В случае необходимости проделать это можно каким-либо методом интерполяции.

Тот же подход к численному решению осуществим для уравнения Вольтерры. При это ситуация, по сравнению с уравнением Фредгольма, даже упрощается, поскольку получаемая система уравнений имеет треугольную или “почти треугольную” матрицу.

4 Уравнения Вольтерры II и I рода.

Оба уравнения представляют собой частные случаи уравнений Фредгольма и могут решаться общими методами. Однако во многих случаях более удобным представляется применение особых методов. Зачастую удается свести решение линейных интегральных уравнений Вольтерры к решению задачи Коши для дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим иллюстрирующие примеры для уравнений II рода.

Пример 4.1. *Решить* $y(x) = 3 - 2x + \int\limits_0^x (2 - x + t)y(t)\,dt$

Р е ш е н и е: Продифференцируем обе части равенства по x, учитывая, что x, справа входит в виде параметра и в подынтегральную функцию, и в верхний предел. Получим $y'(x) = -2 + y(x)(2 - x + x) - \int\limits_0^x y(t)\,dt$. Повторное дифференцирование дает $y''(x) = 2y'(x) - y(x)$, т.е. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$. Начальные условия, необходимые для однозначного нахождения решения полученного уравнения, определятся, если в соотношениях для $y(x)$ и $y'(x)$ положить $x = 0$, откуда $y(0) = 3$; $y'(0) = 3$. Общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид $C_1xe^x + C_2e^x$, а с учетом начальных условий решение исходного интегрального уравнения $y(x) = 3e^x + xe^x$.

Пример 4.2. *Решить* $y(x) = 1 + \int\limits_0^x ty(t)\,dt.$

Р е ш е н и е: Обозначим $\int\limits_0^x ty(t)dt =: \varphi(x),$ тогда $y(x) = 1 + \varphi(x)$. После дифференцирования $\varphi(x)$ получается $\varphi'(x) = xy(x) = x(1 + \varphi(x)) = x + x\varphi(x)$. Из определения φ, следует, что $\varphi(0) = 0$. Задача сведена, таким образом, к задаче Коши для линейного неоднородного уравнения $\varphi'(x) - x\varphi = x$ с указанным условием. Решив его, получаем $\varphi = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$, откуда решение исходного уравнения $y(x) = 1 + e^{\frac{x^2}{2}} - 1 = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Требования, предъявляемые к исходным данным в случае уравнения I рода $f(s) = \int\limits_a^s K(s,t)\varphi(t)dt,$ более жесткие. В частности, из вида уравнения следует, что при $f(a) \neq 0$ оно несовместно, решений не имеет. Если решение есть, отыскать его можно методом последовательных приближений.

Во многих случаях уравнения I рода дифференцированием удается свести к уравнениям II рода.

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 4.3. *Найти решение уравнения* $y(x) = 1 + \int\limits_0^x (xt)^2 y(t)\,dt.$

Пример 4.4. *Решить интегральные уравнения Вольтерры*

а) $y(x) = 3x - 4\sin x + 1 + \int\limits_0^x (x - s)y(s)\,ds,$

б) $y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int\limits_0^x (x-s)y(s)\,ds,$

в) $y(x) = \sin x + \int\limits_0^x \sin(x-t)y(t)\,dt,$

г) $y(x) = \cos x + \int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)\,dt.$

Р е ш е н и е: а) б) $[2\sin x + (x-1)\cos x]$ в) $[x]$ г)[]

Пример 4.5. *Существует ли в классе непрерывных функций решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения $\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t) = f(x)$, если правая часть $f(x)$ равна $a)\cos x$, $b)\sin x$ $c)\sin x \cdot \cos x$.*

[да в случаях b),c)].

Пример 4.6. *Найти решение уравнения с вырожденным ядром при различных значениях параметра; для каких значений решений не существует*

$a)\ y(x) = \lambda \int\limits_0^1 x\sin(2\pi t)y(t)dt + x$

$b)\ y(x) = \lambda \int\limits_0^1 xy(t)dt + \sin 2\pi x$

$c)\ y = \lambda \int\limits_0^\pi \cos^2(x-t)y(t)dt + \sin 2x$

$d)\ y = \lambda \int\limits_{-1}^1 (1+xt)y(t)dt + \sin \pi x$

$[a)y = \frac{2\pi x}{2\pi+\lambda} \quad \lambda \neq -2\pi$

$c)y = \sin 2x \left(\frac{4}{4-\pi\lambda}\right) \quad \lambda \neq 4/\pi$

$d)\ y = \sin \pi x + \frac{2\lambda x}{\pi(1-2/3\lambda)} \quad \lambda \neq 3/2]$

Глава 6

Дифференциальное исчисление в линейных пространствах

В большей части предыдущего материала рассматривались такие операторы и функционалы, когда наиболее существенным оказывалось исходное свойство линейности. Далее мы кратко рассмотрим общие понятия, связанные с дифференцированием и некоторым его приложением.

1 Сильный дифференциал (дифференциал Фреше)

Пусть F - отображение из нормированного пространства X в нормированное же пространство Y (может, определенное лишь на некоторой области $D(F)$, включенной в X). Назовем F *дифференцируемым в точке* x, если существует такой ограниченный линейный оператор $Ł_x$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $||h|| < \delta$ и таких, что $x + h \in D(F)$, выполняется неравенство

$$||F(x+h) - F(x) - Ł_x h|| \le \varepsilon ||h||$$

Неравенство равносильно соотношению

$$F(x+h) - F(x) - Ł_x h = o||h|| \quad \text{или } F(x+h) = F(x) + Ł_x h + o||h||.$$

Очевидно, что если, например, $F(\mathbf{x})$ - это действительнозначная функция нескольких переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$, приведенное определение совпадает с известным определением ее дифференцируемости. Как и ранее, слагаемое $Ł_x h$ носит название *дифференциал (сильный), дифференциал Фреше,*[1] а оператор $Ł_x$, применяемый в этом выражении к h, называется *сильной производной* или *производной Фреше.* Кроме $Ł_x$, для нее используется также привычное обозначение $F'(x)$.

[1]М. Фреше (1878-1943) - французский математик.

В случае одной действительнозначной функции нескольких переменных $f(x_1, x_2, ...x_k)$ применение L_x к h означает вычисление скалярного произведения вектора-строки частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, существующих, по определению, при дифференцируемости функции $f(\mathbf{x})$, и вектора-столбца h. А производная Фреше представляет собой матрицу Якоби, составленную из частных производных.

2 Слабый дифференциал (дифференциал Гато)

Пусть по-прежнему F - отображение из нормированного пространства X в нормированное же пространство Y. *Слабым дифференциалом (дифференциалом Гато)*[2] назовем предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} = \frac{d}{dt}F(x+th)\bigg|_{t=0} =: DF(x,h).$$

Здесь $t-$ скалярный параметр, а стремление к предельному значению понимается в смысле сходимости по соответствующей норме пространства Y.

В случаях, когда $F(X)$ - это действительнозначная скалярная функция нескольких переменных, каждый из элементов $x, x+h, h$ принадлежит X и имеет смысл $n-$мерного вектора, очевидно, что $DF(x,h)$ совпадает с производной $F(x)$ в точке x по направлению вектора h. В случае элементов другой природы часто сохраняют то же название для слабого дифференциала.

Если $DF(x,h)$ представим в виде суммы некоторого ограниченного оператора, применяемого к элементу h в первой степени, то есть если $DF(x,h) = F_c'h$, то этот оператор $F_c'(x)$ называется *слабой производной* отображения $F(x)$.

Но значение $DF(x,h)$ не обязательно зависит от h линейно, и тогда мы имеем дело с ситуацией, когда, например для действительнозначной функции нескольких переменных, даже существование производных по любому направлению недостаточно для ее дифференцируемости. Таким образом, из слабой дифференцируемости отображения $F(x)$ его сильной дифференцируемости не следует.

Обратно, как это очевидно из сравнения определений, из существования дифференциала Фреше (сильного) следует существование дифференциала слабого.

Однако при выполнении некоторых дополнительных требований оба дифференциала существуют одновременно.

[2]Гато (ум. в 1914г) - французский математик.

Теорема 2.1. *Если слабая производная отображения $F(X)$ существует в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и представляет в ней непрерывную в точке x_0 функцию, то в точке x_0 сильная производная тоже существует и совпадает со слабой. (И следовательно, само отображение дифференцируемо.)*
По отношению к упомянутой ранее функции нескольких переменных исходные условия теоремы и означают существование и непрерывность всех частных производных в окрестности точки, что обеспечивает дифференцируемость самой функции в точке.

$\Diamond$ Из существования и непрерывности слабой производной следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое значение δ_ε, что если $||h|| < \delta_\varepsilon$, то $||F'_c(x_0+h) - F'_c(x_0)|| \le \varepsilon$. В то же время на основе аналога формулы конечных приращений можно показать, что $||F(x_0+h) - F(x_0) - F'_c(x_0)h|| \le \sup\limits_{0\le\theta\le1} ||F'_c(x_0+\theta\cdot h) - F'_c(x_0)||\cdot||h||| \le$ $\le \varepsilon||h||$. Тем самым доказано и существование сильной производной, и ее совпадение с F'_c. $\Diamond$

Таким образом, сильные и слабые дифференциалы одной и той же функции зачастую существуют одновременно и определяют равные величины. Не отличаются они и в тех случаях, когда множество прообразов X - это часть оси R, независимо от того, какой характер носит $F(X,Y)$. По этой причине в общих курсах математического анализа часто и не проводят различий между сильным и слабым дифференцированием.

3 Формула Тейлора.

Допустим, что рассматриваемое отображение $F : X \to Y$ относится к линейным операторам $L = \mathfrak{L}(X,Y)$, имеющим дифференциал. На F' также можно смотреть как на линейный оператор, отображающий X в линейное пространство операторов $\mathfrak{L}(X,Y)$, то есть $F' \in \mathfrak{L}(X, \mathfrak{L}(X,Y)$. Из того же множества операторов и оператор $F(X,Y)$, если он линеен. Можно так же поставить вопрос о дифференцируемости F'. В случае сильной дифференцируемости результат $\big(F'\big)'$ называют, как в аналогичном случае числовой функции одного переменного, второй производной от F $\quad (F')' =: F''$. Как и в предыдущем случае, $F'' \in \mathfrak{L}\big(X, \mathfrak{L}(X,Y)\big)$. Рассуждения можно продолжить столь долго, пока будут выполняться предположения о сильной дифференцируемости очередных операторов, и определить таким образом $F^{(n)} := \left(F^{n-1}\right)'$. Оказывается, что в этом случае справедливо соотношение, аналогичное формуле Тейлора для числовых функций, и называемое *формулой Тейлора для отображений*

Теорема 3.1. *Пусть отображение, действующее из X в Y, определено в некоторой области $A \subset X$ так, что $F^{(n)}$ существует и равномерно непрерывна по x в области A. Тогда справедливо равенство*

$$F(x+h)-F(x) = F'(x)(h)+\frac{1}{2!}F''(x)(h,h)+...+\frac{1}{n!}F^{(n)}(h,h..)+\alpha(x,h),$$

где $||\alpha(x,h)|| = o(||h||^n)$.

Доказывается формула по индукции. Справедливость утверждения для $n = 1$ следует из сильной дифференцируемости. Внешняя простота и лаконичность записи на деле скрывает достаточно сложную сущность. Отображения-дифференциалы в пространство линейных операторов интерпретируются при этом как билинейные отображения декартовых произведений $X \times ...X$ в Y, что и определяет входящие в формулу дифференциалы высших порядков $F^{(n)}(h,h..)$.

Конкретная запись даже в сравнительно простых случаях достаточно громоздка. Если, например, X и Y евклидовы пространства размерностей m и n, отображение $Y = F(X)$ записывается в виде

$$\begin{array}{l} y_1 = F_1(x_1,...,x_m) \\ .... \\ y_n = F_n(x_1,...,x_m), \end{array} \qquad \text{а } F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

$F'(x)(h)$ в данном случае представляет собой произведение приведенной матрицы $F'(x)$ на столбец $(h_1, .. , h_m)$;
$F''(x)$ определяется величинами $\frac{\partial y_k}{\partial x_i \partial x_j}$ $(k = 1,..n,\ i,j = 1,..m)$, а $F''(x)(h,h)$ - это n квадратичных форм относительно $h_i h_j$ с приведенными выше коэффициентами.

Формула Тейлора для отображений служит основой для некоторых теоретических выводов и практических оценок.

4 Решение экстремальных задач

Важную часть решения многих научно-технических проблем составляет исследование экстремальных режимов. Нахождением экстремумов функционалов занимается *вариационное исчисление.* Основные положения его и общие подходы можно сформулировать в терминах произвольных функционалов, а более детальное и полное изложение проводится в курсах дифференциальных уравнений либо в других, специальных курсах.

Пусть F действительнозначный функционал, заданный на некотором банаховом (полном, линейном) пространстве X. Говорят, что он достигает *минимума* (максимума) на элементе x_0, если для всех x, достаточно близких к x_0, выполняется неравенство $F(x)-F(x_0) \geq 0 \quad \big(F(x)-F(x_0) \leq 0$ для максимума $\big)$.

4.1. Необходимое условие экстремума.

Теорема 4.1. *Если F – дифференцируемый функционал и он достигает в точке x_0 экстремального значения, в точке x_0 дифференциал функционала необходимо равен 0, независимо от h.*

$\Diamond$ Допустим, что при некоторых h $F'(x_0)h$ в 0 не обращается, $F'(x_0)h \neq 0$. Возьмем набор элементов βh при $\beta \in R$ достаточно малых, но имеющих разные знаки. В общую формулу $F(x_0+h)-F(x_0)=F'(x_0)h+o(||h||)$ подставим βh. В силу линейности функционала F' главная часть приращения, равная $F'(x_0)(\beta h)=\beta F'(x_0)h$, при выбранных малых коэффициентах β имеет разные знаки, что означает отсутствие экстремума в точке x_0. $\Diamond$

Первый дифференциал функционала называют еще его первой вариацией. Необходимое условие экстремума поэтому можно сформулировать в форме: в точке экстремума первая вариация функционала равна нулю. Для действительной функции нескольких переменных это означает равенство 0 всех частных производных. Даже в этом частном случае необходимые условия не тождественны с достаточными.

Пример 4.1. *Рассмотрим функционал $F(x)=\int\limits_a^b f\big(t,x(t),x'(t)\big)dt$ на пространстве $C'[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на отрезке $[a,b]$. Тому же классу принадлежат и $h(t)$. Пусть* *функция $f(t,x,x')$ дважды непрерывно дифференцируется по своим аргументам. Получим необходимое условие экстремума в точке $x(t)$.*

Р е ш е н и е:

По формуле Тейлора,
$F(x+h)-F(x)=\int\limits_a^b\big(f(t,x+h,x'+h')-f(t,x,x')\big)dt=\int\limits_a^b\big(f'_x\cdot h+f'_{x'}\cdot h'\big)dt+o(||h||_{C^1})$,
откуда необходимое по предыдущей теореме условие экстремума приобретает вид $\int\limits_a^b f\big(f'_x\cdot h+f'_{x'}\cdot h'\big)dt=0$ при произвольном $h\in C'[a,b]$. Преобразуем полученную формулу к виду, более удобному для практического использования, проинтегрировав по частям $\int\limits_a^b f'_{x'}\cdot h'dt$. Получается

$$\int\limits_a^b\big(f'_x\cdot h+f'_{x'}\cdot h'\big)dt=\int\limits_a^b\big(f'_x\cdot h\big)dt+f'_{x'}\cdot h\Big|_a^b-\int\limits_a^b h\frac{d}{dt}f'_{x'}dt=0,\text{ то есть}$$

$$\int\limits_a^b\Big(f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}\Big)hdt+f'_{x'}\cdot h\Big|_a^b=0.$$

Допустим, что экстремум отыскивается среди функций с фиксированными значениями $y(a),y(b)$ (задача с закрепленными концами), при этом $h(a)=h(b)=0$. Отсюда следует необходимое условие $\int\limits_a^b\big(f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}\big)hdt=0$ при всех $h(t)$ с $h(a)=h(b)=0$, что приводит к уравнению, справедливому на $[a,b]$,

$$f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}=0. \tag{4.1}$$

Действительно, если бы в какой-то точке отрезка скобка под интегралом не обращалась бы в 0, она, по непрерывности, сохраняла бы знак в некоторой окрестности точки (для определенности - положительный). Тогда для $h(t)$, равной 1 в зтой окрестности и 0 вне нее, $\int\limits_a^b\big(f'_x-\frac{d}{dt}f'_{x'}\big)hdt$,был бы также положительным, что противоречит теореме (4.1).

Подобные рассуждения приводят к выводу, что условие (4.1) справедливо при любом $h(t)$, из чего следует также, что для элементов $x(t)$, дающих экстремум функционалу, на концах отрезка

$$f'_{x'}\Big|_{t=a} = f'_{x'}\Big|_{t=b} = 0.$$

Графики функций, удовлетворяющих уравнению (4.1), называются *экстремалями.* Кривая, на которой реализуется функционал в данном классе функций, принадлежит экстремалям. Уравнение (4.1) носит название *уравнения Эйлера для экстремалей.* По отношению к $x(t)$ оно имеет второй порядок, его общее решение, когда оно существует, включает в себя две произвольные постоянные. Конкретные значения постоянных можно определить из условия прохождения кривой через две заданные точки, то есть задавая $y(a)$ и $y(b)$.

Пример 4.2. *Рассмотрим известную задачу о брахистохроне, сыгравшей заметную роль в становлении вариационного исчисления. Найти кривую, соединяющую заданные точки $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$, при движении по которой без трения материальная точка скатится под воздействием собственной тяжести из точки A (из состояния покоя) в точку B за кратчайшее время.*

Р е ш е н и е: Уравнение искомой кривой запишем в форме $y = y(x)$. Совместим A с началом координат, направляя ось Oy вертикально вниз, а ось Ox - направо. Из физики известно, что при рассматриваемом движении скорость точки $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$, поэтому время, необходимое для перемещения из A в B, поскольку $x_a = y_a = 0,\ y_b = y(x_b),\ ds = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2},$ равно

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Получен функционал рассмотренного типа, подынтегральная функция в котором, в отличие от общего случая, не содержит в явном виде переменной интегрирования x. Уравнение (4.1) принимает в этом случае вид $f'_y - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'x} y' y'' = 0$, что после умножения на y' можно представить в виде $\frac{(f - y' f'_{y'})}{dx} = 0$ и получить первый интеграл $f - y' f'_{y'} = c$.

В нашем случае

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c,$$

что после упрощений приводит к уравнению, решаемому параметризацией переменных $y(1+y'^2) = c_1$.
Положим $y' = \operatorname{ctg} z$, тогда $y = \frac{c_1}{1+\operatorname{ctg}^2 z} = c_1 \sin^2 z = \frac{c_1}{2}(1-\cos 2z)$.
Далее $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 \sin z \cos z dz}{\operatorname{ctg} z} = c_1(1-\cos 2z)dz \Rightarrow x = c_1(z - \frac{\sin 2z}{2}) + c_2$.
С учетом прохождения кривой через начало координат ($c_2 = 0$), после переобозначения $2z = p$ получим уравнение кривой в известной форме

$$x = \frac{c_1}{2}(p - \sin p), \qquad y = \frac{c_1}{2}(1-\cos p),$$

где c_1 окончательно определяют из $y(x_b) = y_b < 0$. Кривая принадлежит к семейству циклоид.

Аналогично из теоремы (4.1) можно вывести уравнения экстремалей (уравнения Эйлера) для функционала

$$F = \int_a^b f(t, x_1, x_2, ...x_n, x_1', x_2', ...x_n')dt \quad \text{систему}$$

$f_{x_1} - \dfrac{d}{dt} f_{x_1'} = 0, \; \dots, \; f_{x_n} - \dfrac{d}{dt} f_{x_n'} = 0,$ где каждое из n уравнений также является уравнением второго порядка и для каждой функции заданы два условия;

для функционала вида $F = \int_a^b f\big(t, x(t), x'(t), ...x^{(n)}(t)\big)dt$

уравнение порядка $2n$ $\quad f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{x''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f_{x^n}$
с граничными условиями - функцией и производными до $n-1-$го порядка - на обоих концах $[a,b]$;
для функционала $F = \iint\limits_D f\big(x, y, z, p, q\big)dx\ dy,$ где $z = z(x,y)$ $p = \frac{\partial z}{\partial x},$ $q = \frac{\partial z}{\partial y},$ а значения функции $z(x,y)$ заданы на границе области интегрирования D
уравнение в частных производных $f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_p - \frac{\partial}{\partial y} f_q$ с известными значениями на границе.

На основе теоремы (4.1) выводятся также уравнения и в более сложных случаях, когда граничные условия отличаются от вышеприведенных.

4.2. О достаточных условиях экстремума. Если известно, что решение поставленной задачи существует и единственно, найденная по уравнению Эйлера экстремаль единственна и представляет собой это решение. Однако в общем случае требуется убедиться в том, что экстремум, действительно, реализуется, и надо определить его характер (максимум, минимум).

Сравнительно простой случай исследования на экстремум действительной функции нескольких переменных, когда для наличия экстремума достаточно знакоопределенности второго дифференциала ($d^2f > 0$ для минимума и $d^2f < 0$ для максимума) полностью не обобщается на функционалы, заданные на банаховом пространстве.

Вывод об отсутствии экстремума, если d^2f может менять знак в окрестности экстремали, остается, однако достаточным признаком минимума в точке x_0 будет более сильное утверждение: существует неотрицательная постоянная γ_0 такая, что $d^2f > \gamma_0 \cdot ||h||^2$ при произвольном выборе элементов h. Аналогично для максимума. Однако практическая проверка этого условия, как правило, не проста.В вариационном исчислении используют другие, более тонкие методы.

Практическая и самостоятельная работа.

Пример 4.3. *Найти производную Фреше функционала $F(x) = (x, x)$ в вещественном гильбертовом пространстве.*

$$[F'(x)h = 2(x, h)]$$

Пример 4.4. *Напишите формулу Тейлора для действительной функции двух переменных $f(x, y)$ с остаточным членом в форме Пеано $o(||h||^3)$ в предположении о достаточной гладкости функции $(h = h_x, h_y)$.*

Пример 4.5. *Получить необходимые условия экстремума функционала $F(x) = \int\limits_a^b f\big(f(t, x(t)\big)dt$. Все функции считать принадлежащими пространству C'.*

$$[f'_x(t, x) = 0]$$

Пример 4.6. *Найти экстремали для функционала* $\int\limits_0^{\pi/2} \left(x^2 - x'^2\right) dt$, *проходящие через точки* $(0,0), (\pi/2, 1)$.

$[x = \sin t]$

Пример 4.7. *Найти экстремали функционала* $\int\limits_{x+0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$.

$[x^2 + (y - c_1)^2 = c_2^2 -$ окружности$]$

Пример 4.8. *Найти экстремали функционала* $\int\limits_{x+0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx$.

$[(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2 -$ окружности$]$

Пример 4.9. *Исследовать на экстремум функционал* $\int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy') dx$.

[Вариационная задача лишена смысла, потому что интеграл не зависит от пути интегрирования.]

Пример 4.10. *Найти экстремали функционала* $\int\limits_{x_0}^{x_1} (y'(1 + x^2 y') dx$.

$[y = \frac{c_1}{x} + c_2 -$ гиперболы$]$

Пример 4.11. *Найти экстремали функционала* $\int\limits_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx$.

$[y = \frac{-x^2}{4} + c_1 x + c_2 -$ параболы$]$

Пример 4.12. *Найти уравнение кривой, проходящей через точки* $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$, *такой, чтобы при вращении вокруг оси* Ox *дуга ее, заключенная между точками* A *и* B, *описывала бы поверхность наименьшей площади. (Длина дуги выражается формулой* $\int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$, *а площадь поверхности вращения* $2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx$. *)*

$[y = c_1 \operatorname{ch} \frac{x - c_2}{c_1}]$ или$[x = c_1 p + c_2,\ y = c_1 \operatorname{ch} p]$

Литература

(1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М., Наука, 1989 и др издания.

(2) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.3, М., “Высшая школа”, 1989.

(3) Зорич В.А. Математический анализ, ч.II, М., МЦНМО, 1998 и др. издания.
(4) Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика М., Физматлит, 2000.
(5) Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу, М., “Высшая школа”, 1999
(6) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу, М., Физматлит, 2002.
(7) Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного., ч.3, М., Наука, 1970.
(8) Под редакцией В.Б. Миносцева, Курс высшей математики, ч. I,II,III, М., РИЦ МГИУ, 2002 и др. издания
(9) Тиняков Г.П. Дополнительные главы высшей математики М., ГИНФО, 2000

Литература

(1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М., Наука, 1989 и др издания.
(2) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.3, М., “Высшая школа”, 1989.
(3) Зорич В.А. Математический анализ, ч.II, М., МЦНМО, 1998 и др. издания.
(4) Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика М., Физматлит, 2000.
(5) Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу, М., “Высшая школа”, 1999
(6) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу, М., Физматлит, 2002.
(7) Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного., ч.3, М., Наука, 1970.
(8) Под редакцией В.Б. Миносцева, Курс высшей математики, ч. I,II,III, М., РИЦ МГИУ, 2002 и др. издания
(9) Тиняков Г.П. Дополнительные главы высшей математики М., ГИНФО, 2000

Литература

(1) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М., Наука, 1989 и др издания.

(2) Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т.3, М., "Высшая школа", 1989.

(3) Зорич В.А. Математический анализ, ч.II, М., МЦНМО, 1998 и др. издания.

(4) Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика М., Физматлит, 2000.

(5) Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу, М., "Высшая школа", 1999

(6) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу, М., Физматлит, 2002.

(7) Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного., ч.3, М., Наука, 1970.

(8) Под редакцией В.Б. Миносцева, Курс высшей математики, ч. I,II,III, М., РИЦ МГИУ, 2002 и др. издания

(9) Тиняков Г.П. Дополнительные главы высшей математики М., ГИНФО, 2000