**Билет 9. Вопрос 1.**
**1. Решение одномерной стационарной задачи распространения тепла методом конечных элементов.**
Распределение температуры вдоль одномерной проводящей балки можно описать уравнением:

$$\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du}{dx}\right)+q\left(u,x\right)=0$$

Здесь u температура, q(u, x) – утечка тепла, k – теплопроводность. Рассмотрим в качестве примера случай q(u, x)=u. Тогда уравнение примет вид:

$$-\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)+u=0 \quad 0<x<1$$

Предположим, что граничные условия имеют вид:

$$u\left(0\right)=0 \text{ and } u\left(1\right)=1$$

Это уравнение при k = 1 имеет точное решение равное:

$$u\left(x\right)=\frac{e}{e^2-1}\left(e^x-e^{-x}\right)$$

Чтобы решить рассматриваемое уравнение методом конечных элементов мы должны проделать следующее:

1. Записать уравнение теплопроводности в интегральном виде.
2. Проинтегрировать по частям (в одномерном случае) или с использованием теоремы Грина (в двумерном или трехмерном случае) чтобы уменьшить порядок производных.
3. Ввести конечно-элементную аппроксимацию для температурного поля, используя параметры узлов и базисные функции конечных элементов.
4. Проинтегрировать по элементам и вычислить матрицы нагрузки элементов и векторы правой части.
5. Путем ансамблирования получить глобальные уравнения.
6. Записать граничные условия.
7. Решить глобальные уравнения.
8. Оценить потоки.

1. Интегральное уравнение
Составим интегральное уравнение, используя метод взвешенных невязок:

$$\int R\omega.dx=0 \qquad\qquad R=-\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)+u$$

Здесь R – невязка, а ω – весовая функция. Если u точное решение уравнения во всей области, то невязка равна нулю во всей области. Подставим выражение для невязки в интегральное уравнение

$$\int_0^1\left\{-\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)\omega+u\omega\right\}dx=0$$

Полученное интегральное уравнение показывает, что невязка (или ошибка) стремится к нулю в среднем по пространству; ω – выбирается так, что невязка ортогональна к пространству функций, используемых в качестве аппроксимации u.

2. Интегрирование по частям

Большое преимущество решения задачи путем решения интегрального уравнения состоит в возможности понижения порядка производных при помощи интегрирования по частям (в случае двумерной и трехмерной задач при помощи использования теоремы Грина). Использование формулы интегрирования по частям дает:

$$\int_0^1 f\frac{dg}{dx}dx = [f.g]_0^1 - \int_0^1 g\frac{df}{dx}dx$$

$$\int_0^1 \omega\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du}{dx}\right)dx = \left[\omega\left(-k\frac{du}{dx}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-k\frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx}\right)dx$$

В результате интегральное уравнение примет вид:

$$\int_0^1 \left(k\frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx} + u\omega\right)dx = \left[k\frac{du}{dx}\omega\right]_0^1$$

3. Аппроксимация конечными элементами

Разделим область 0<x<1 на три элемента равной длины и заменим u(x) внутри каждого элемента при помощи конечно-элементной аппроксимации

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 = \varphi_n(\xi)u_n$$
$$x(\xi) = \varphi_1(\xi)x_1 + \varphi_2(\xi)x_2 = \varphi_n(\xi)x_n$$

При использовании линейных базисных функций $\varphi_1(\xi) = 1 - \xi$

$$\varphi_2(\xi) = \xi$$

Далее используем аппроксимацию Галеркина $\omega = \varphi_m$

Интеграл по рассматриваемой области можно представить в виде суммы интегралов по каждому конечному элементу:

$$\int_0^1 \cdot\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \cdot\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \cdot\, dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \cdot\, dx$$

Перейдем в интегралах от интегрирования по x к интегралам по ξ

$$\int_{x_1}^{x_2} \cdot\, dx = \int_0^1 \cdot J\, d\xi \qquad J = \left|\frac{dx}{d\xi}\right|$$

J – якобиан перехода от x координат к ξ координатам.

4. Интегралы по элементам
Интегралы в левой части уравнения имеют вид:

$$\int_0^1 \left(k\frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx} + u\omega\right) J\, d\xi$$

$$u = \varphi_n u_n$$

$$\omega = \varphi_m$$

$$u_n \int_0^1 \left(k\frac{d\varphi_m}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{d\varphi_n}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \varphi_m\varphi_n\right) J\, d\xi$$

$$x(\xi) = \varphi_n . X_n$$

$$x = \frac{1}{3}\xi \qquad J = \frac{dx}{d\xi} = \tfrac{1}{3}$$

Матрица, на которую умножается $u_n$,называется матрицей жесткости:

$$E_{mn} = \int_0^1 \left(k\frac{d\varphi_m}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}\frac{d\varphi_n}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \varphi_m\varphi_n\right) J\, d\xi = \int_0^1 \left(k\frac{d\varphi_m}{d\xi}3\frac{d\varphi_n}{d\xi}3 + \varphi_m\varphi_n\right) \frac{1}{3}\, d\xi$$

Чтобы найти матрицу, подставим базисные функции и их производные

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi \quad \text{or} \quad \frac{d\varphi_1}{d\xi} = -1$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi \quad \text{or} \quad \frac{d\varphi_2}{d\xi} = 1$$

$$E_{11} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(9k\left(\frac{d\varphi_1}{d\xi}\right)^2 + (\varphi_1)^2\right) d\xi = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(9k(-1)^2 + (1-\xi)^2\right) d\xi = \frac{1}{3}\left(9k + \frac{1}{3}\right.$$

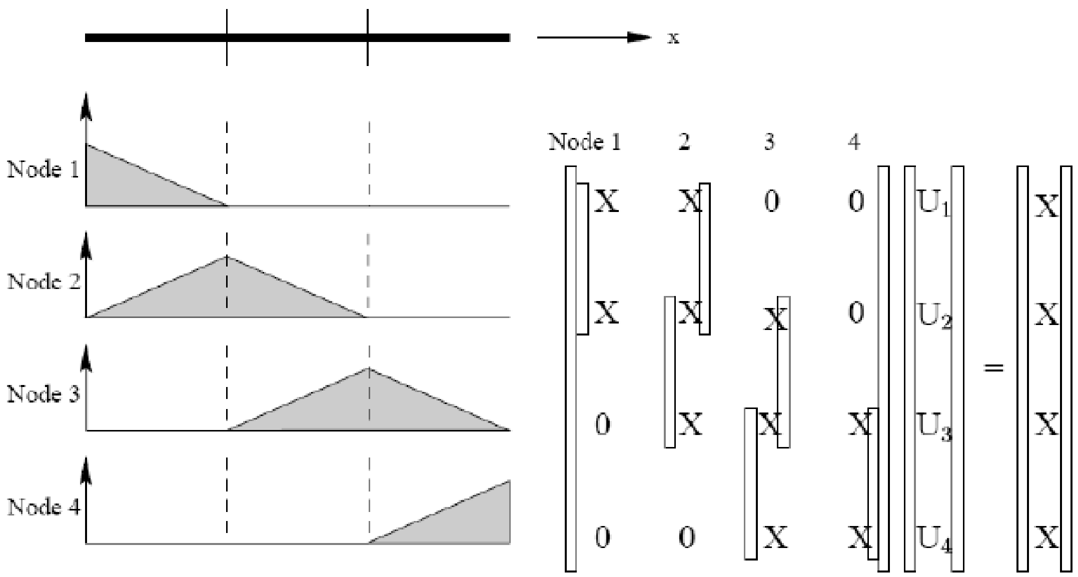
$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{3}\left(-9k + \frac{1}{6}\right)$$

$$E_{22} = \frac{1}{3}\left(9k + \frac{1}{3}\right)$$

$$E_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\left(9k + \frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3}\left(-9k + \frac{1}{6}\right) \\ \frac{1}{3}\left(-9k + \frac{1}{6}\right) & \frac{1}{3}\left(9k + \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Заметим, что матрица жесткости конечного элемента симметрична

5. Ансамблирование




$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

**2. Ассоциации и атрибуты концептуальной модели.**

**Построение концептуальной модели**

Концептуальная модель отображает основные (с точки зрения моделирующего) понятия предметной области. Она является наиболее важным артефактом, создаваемым на этапе объектно-ориентированного анализа.

**Важным свойством концептуальных моделей является представление понятий реального мира, а не программных компонентов.**

*Концептуальная модель* — это представление понятий в терминах предметной области. На языке UML концептуальная модель представляется в виде набора *статических структурных диаграмм,* на которых не определены никакие операции. Сам термин "концептуальная модель" указывает на строгое соответствие понятиям предметной области, а не программирования .Концептуальная модель может отображать следующее.

- Понятия
- Ассоциации между понятиями
- Атрибуты понятий

## Концептуальная модель: добавление ассоциаций

В процессе разработки концептуальной модели необходимо идентифицировать связи (ассоциации) между понятиями, удовлетворяющие информационным требованиям имеющихся в текущий момент процесса разработки прецедентов, а также выделить те из них, которые способствуют лучшему пониманию концептуальной модели. В данной главе сначала рассматривается процесс определения соответствующих ассоциаций, а затем полученные навыки применяются к добавлению ассоциаций в концептуальную модель системы розничной торговли.

*Ассоциация* (association) — это связь между понятиями, отражающая некоторое значимое и полезное отношение между ними

В языке UML ассоциации описываются как "структурные взаимосвязи между объектами различных типов”.

Обычно в концептуальную модель включаются следующие ассоциации:

• Ассоциации, знания о которых нужно сохранять в течение некоторого периода (важные ассоциации)

• Ассоциации, производные от содержащихся в списке стандартных ассоциаций

## Система обозначений для ассоциаций языка UML

Ассоциация обозначается проведенной между понятиями линией, с которой связано определенное имя. Обычно ассоциация является двунаправленной. Это означает, что от одного объекта любого типа возможен логический переход к другому объекту.

Такой переход является абсолютно абстрактным. Он не определяет тип взаимосвязей между программными сущностями.

На концах линии, которая обозначает ассоциацию, могут содержаться выражения, определяющие количественную связь между экземплярами понятий.

Дополнительная стрелка рядом с именем ассоциации указывает, в каком направлении нужно читать ее имя. Она не определяет направление видимости или перемещения. Если такая стрелка отсутствует, то имена ассоциаций следует читать с использованием общепринятых соглашений, а именно — слева направо и сверху вниз. Однако в языке UML в явной форме это правило отсутствует. Стрелка направления чтения не имеет семантического значения. Она лишь представляет способ чтения диаграмм.

## Атрибуты

*Атрибут* (attribute) — это абстрактное свойство объекта.

В концептуальную модель включаются те атрибуты, для которых определены соответствующие требования (например, прецеденты) или для которых предполагается, что необходимо хранить определенную информацию.

Например, в товарном чеке обычно указываются дата и время. Следовательно, для понятия Sale (Продажа) требуются атрибуты date (дата) и time (время).

Система обозначений атрибутов в языке UML

Атрибуты помещаются во второй раздел условного обозначения понятия.

Дополнительно может быть указан также тип атрибута. Например, у понятия Sale атрибуты date, startTime, у второго атрибута может быть указан тип атрибута Time через двоеточие.